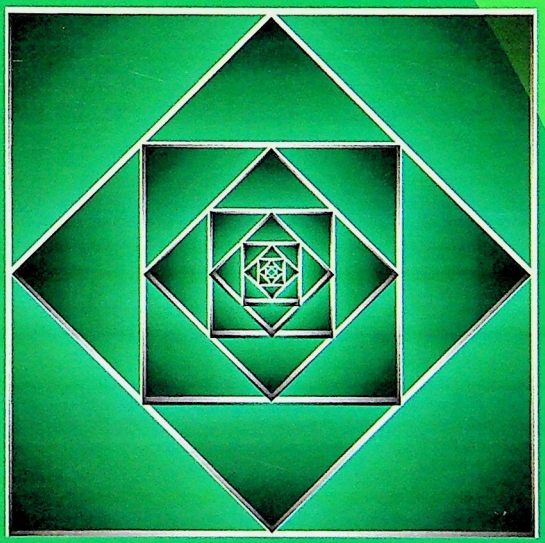
SOLUCIONÁRIO

NOÇÕES DE MATEMÁTICA



VOLUME 2
Progressões
e Logaritmos

Marcílio Miranda

Marcílio Miranda de Carvalho

SOLUCIONÁRIO MATEMÁTICA

Progressões e Logaritmos

VOLUME 2

Editora Vestseller
Fortaleza
1ª Edição – Janeiro de 2015

Índice

Capítulo 1
Potência e Raízes 7
Capítulo 2
A Indução 23
Capítulo 3
Sequências 37
Capítulo 4
Progressões Aritméticas 41
Capítulo 5
Progressões Armônicas 55
Capítulo 6
Progressões Geométricas 57
Capítulo 7
Logaritmos 75
Capítulo 8
Propriedade dos Logaritmos 83
Capítulo 9
Logaritmos Decimais 91
Capítulo 10
Logaritmos Neperianos – Uma breve história 97
Capítulo 11
Progressões Geométricas 99
Capítulo 12
Função exponencial – função logaritmo – inequações 113
Capítulo 13
Construção de gráficos 125
Capítulo 14
Exponencial e logaritmo: funções inversas 127
Bibliografia 139

Capítulo 1

Capítulo 1

Questão – 1.4

Solução:

a) $(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -27$
b) $-(3)\cdot(3)\cdot(3) = -27$
c) $-(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = 27$
d) $(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = 81$
e) $-(3)\cdot(3)\cdot(3) = -81$
f) $-(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -81$

Questão – 1.5

Solução:

a) 1, pois $a^0 = 1$ para todo a real
b) –1
c) 1, pois $a^0 = 1$ para todo a real
d) 0, pois $0^n = 0$ para todo n natural positivo
e) 1, pois $(-1)^n = 1$ para todo n par
f) 1, pois $a^0 = 1$ para todo a real

Questão – 1.6

Solução:
a) positivo, pois se a é positivo a^n é positivo
b) positivo se n é positivo e negativo se n é impar
c) positivo se $n = 0$ e nulo se $n \neq 0$
d) positivo, pois se a é positivo a^n é positivo

Questão – 1.7

Solução:
Se n é par teremos $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + ... + (-1)^{2k-1} + (-1)^{2k} = (1-1) + (1-1) + ... + (1-1) = 0$
Se n é impar teremos $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + ... + (-1)^{2k-1} = (1-1) + (1-1) + ... + (-1) = -1$

Questão – 1.8

Solução:

$f(-1) = 5\cdot(-1)^{2n+1} - 10\cdot(-1)^{2n} + 3\cdot(-1)^{2n-1} + 5 = -5 - 10 - 3 + 5 = -13$

Questão – 1.10

Solução:

a) $(-3)^{-3} = \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}$

b) $-3^{-3} = -\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}$

c) $-(-3)^{-3} = -\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$

d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)\cdot\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{125}{8}$

e) $\frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}} = \frac{1}{\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{125}{8}\right)} = \frac{8}{125}$

f) $-\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3} = -\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{125}{8}$

Questão – 1.11

Solução:

a) $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + 2^{-2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} + (-2)^{-2}} = \frac{2 + \left(\frac{1}{4}\right)}{-2 - \left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{9}{4}}{-\frac{9}{4}} = -1$

b) $\left[2^{-2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 5.2^{0}\right]^{-1} = \left[\frac{1}{4}\cdot 4 + 5\right]^{-1} = 6^{-1} = \frac{1}{6}$

Questão – 1.12

Solução:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{(a+b)^{-1}}=\frac{ab}{a+b}\cdot\frac{1}{\frac{1}{a+b}}=\frac{ab}{a+b}\cdot(a+b)=ab$$

Questão – 1.13

Solução:

$$4\cdot(a+b)^{-1}=(a)^{-1}+(b)^{-1}\Rightarrow 4\cdot\left(\frac{1}{a+b}\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\Rightarrow\frac{4}{a+b}=\frac{a+b}{ab}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(a-b)^2=0\Rightarrow a=b$$

Questão – 1.14

Solução:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)=m\Rightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=m^2\Rightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=m^2\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=m^2-2$$

Questão – 1.19

Solução:

a) $\dfrac{(ab^2)^3}{(a^2b)^2}=\dfrac{a^3b^6}{a^4b^2}=\dfrac{b^4}{a}$

b) $(a^{-3}\cdot b^2)^0=1$

c) $\dfrac{7^{-1}a^0b^{-2}}{(3ab)^{-4}}=\dfrac{1}{7b^2}\cdot 81a^4\cdot b^4=\dfrac{81a^4\cdot b^2}{7}$

d) $\left[\left(\dfrac{ab^{-2}\cdot 2^{-1}}{a^2b^{-2}}\right)^{-1}\right]^3=\left[\dfrac{a^2b^{-2}}{ab^{-2}\cdot 2^{-1}}\right]^3=\dfrac{a^6b^{-6}}{a^3b^{-6}\cdot 2^{-3}}=8a^3$

e) $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{(ab)^{-1}} = \dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{ab}} = \dfrac{a+b}{ab}\cdot ab = a+b$

f) $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}} = \dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}} = \dfrac{a+b}{ab}\cdot\dfrac{ab}{b-a} = \dfrac{a+b}{b-a}$

Questão – 1.20

Solução:

a) $2^{2\alpha+3\beta} = 2^{2\alpha}\cdot 2^{3\beta} = (2^{\alpha})^2\cdot(2^{\beta})^3 = m^2\cdot n^3$

b) $2^{\beta-\alpha} = \dfrac{2^{\beta}}{2^{\alpha}} = \dfrac{n}{m}$

c) $2^{5\alpha-\beta} = \dfrac{2^{5\alpha}}{2^{\beta}} = \dfrac{m^5}{n}$

d) $4^{\alpha-\beta} = \dfrac{2^{2\alpha}}{2^{2\beta}} = \left(\dfrac{m}{n}\right)^2$

e) $0{,}5^{\alpha+\beta} = \dfrac{1}{2^{\alpha+\beta}} = \dfrac{1}{m\cdot n}$

f) $0{,}25^{3\alpha-2\beta} = \dfrac{1}{4^{3\alpha-2\beta}} = \dfrac{1}{\dfrac{2^{6\alpha}}{2^{4\beta}}} = \dfrac{2^{4\beta}}{2^{6\alpha}} = \dfrac{n^4}{m^6}$

Questão – 1.21

Solução:

$$A = 2^8\cdot 4^{-3}\cdot(a^4\cdot b^{-2})^3\cdot\left(\frac{b^{-2}\cdot a^5}{a^{-1}\cdot b^{-3}\cdot c^4}\right)^{-2} = \frac{4a^{12}\cdot b^{-6}\cdot a^{-2}\cdot b^{-6}\cdot c^8}{b^{-4}\cdot a^{10}} = 4\cdot\left(\frac{c}{b}\right)^8$$

Questão – 1.22

Solução:

$$\frac{\left[(-12)^{-8}\right]^{-2}\cdot 75^{-4}\cdot(-4)^{-9}}{(25^{-2})^4\cdot 18^6\cdot 10^4}=\frac{(-2^2\cdot 3)^{16}\cdot 3^{-4}\cdot 5^{-8}\cdot -2^{-18}}{5^{-16}\cdot 2^6\cdot 3^{12}\cdot 2^4\cdot 5^4}=-\frac{2^{14}\cdot 3^{12}\cdot 5^{-8}}{2^{10}\cdot 3^{12}\cdot 5^{-12}}=-10^4$$

Questão – 1.23

Solução:

a) $P=\left[x^{2^m}+y^{2^m}\right]\cdot\left[x^{2^m}-y^{2^m}\right]=x^{2^{m+1}}+x^{2^m}\cdot y^{2^m}-x^{2^m}\cdot y^{2^m}-y^{2^{m+1}}=x^{2^{m+1}}-y^{2^{m+1}}$

b) $P=x^{2^{m+1}}-y^{2^{m+1}}=(10^4)^{2^3}-(10^2)^{2^3}=10^{32}-10^{16}=$

$=99999999999999990000000000000000$

Portanto P termina em 16 zeros

Questão – 1.26

Solução:

a) F, pois $\sqrt[4]{16}=2$

b) V, pois $2^4=16$

c) V, pois $3^3=27$

d) V, pois $(-3)^3=-27$

e) V, $\sqrt[4]{16}=2$

f) F, pois $\sqrt{(-5)^2}=5$

Questão – 1.27

Solução:

$$\sqrt{\frac{1}{(2-\sqrt{5})^2}}-\sqrt{\frac{1}{(2+\sqrt{5})^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}-2}-\frac{1}{2+\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}-2}\cdot\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}-\frac{1}{2+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2}$$

$=\sqrt{5}+2-(\sqrt{5}-2)=4$

Questão – 1.28

Solução:

Se $x \geq -1$ então $\sqrt{(x+1)^2} = x+1$ e se $x < -1$ então

$\sqrt{(x+1)^2} = -(x+1) = -x-1$

Questão – 1.35

Solução:

$\sqrt[9]{-1} + \sqrt[3]{0} - \sqrt[5]{243} - \sqrt[4]{81} + \sqrt{49} = -1+0-3-3+7 = 0$

Questão – 1.35

Solução:

$3\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + \sqrt{2} - \sqrt{75} + \sqrt{48} = 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + \sqrt{2} - 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = \sqrt{2} - \sqrt{3}$

Questão – 1.37

Solução:

$\sqrt{3} = \sqrt[6]{27};\ \sqrt[3]{6} = \sqrt[6]{36};\ \sqrt[6]{30}$

Questão – 1.38

Solução:

$\sqrt{6} = \sqrt[8]{1296};\ \sqrt[4]{12} = \sqrt[8]{144} \Rightarrow \sqrt[8]{72} < \sqrt[4]{12} < \sqrt{6}$

Questão – 1.39

Solução:

a) $(\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{10}) \cdot \sqrt{2} = 2 + \sqrt{10} - 2\sqrt{5}$

b) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[6]{4} = \sqrt[12]{8} \cdot \sqrt[12]{16} = \sqrt[12]{128}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{27}}{3} = \dfrac{\sqrt[6]{108}}{3} = \sqrt[3]{\dfrac{4}{27}}$

Nota: NOTE QUE NOSSO GABARITO DIVERGE DO GABARITO DO LIVRO

Para obtermos o gabarito do livro deveríamos ter $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$

d) $3\cdot\left(\frac{\sqrt{6}-3}{3}\right)^2+6\cdot\left(\frac{\sqrt{6}-3}{3}\right)=3\cdot\left(\frac{15-6\sqrt{6}}{9}\right)+\left(\frac{6\sqrt{6}-18}{3}\right)=-\frac{3}{3}=-1$

e) $\sqrt{4\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}+\sqrt[3]{8\sqrt{\frac{1}{2}}}=\sqrt[6]{32}+\sqrt[6]{32}-2\sqrt[6]{32}=0$

Questão – 1.40

Solução:

a) $\frac{9}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Nota: NOTE QUE NOSSO GABARITO DIVERGE DO GABARITO DO LIVRO

Observe que $\frac{9}{2\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow 9\cdot 2=3\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\Leftrightarrow 18=18$ portanto nossa resposta está correta

Observe que $\frac{9}{2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{6}}{8}\Leftrightarrow 9\cdot 8=5\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{3}\Leftrightarrow 72=30\sqrt{2}$ portanto o gabarito do livro está errado

b) $\frac{1}{\sqrt[5]{7}}\cdot\frac{\sqrt[5]{7^4}}{\sqrt[5]{7^4}}=\frac{\sqrt[5]{2401}}{7}$

c) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{7+2\sqrt{10}}{3}$

d) $\frac{4}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}\cdot\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{4\cdot(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{4\cdot(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}+\sqrt{6}$

e) $\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2}}=\frac{2\cdot(\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2})}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=$

$=\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2})=\sqrt{2\cdot(2+\sqrt{2})}-2$

Questão – 1.41

Solução:

a) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}+\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}+\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3-2\sqrt{2}}{1}+\sqrt{2}=3-\sqrt{2}$

b) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{3}-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}+\sqrt{6}\ (\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$=2\sqrt{3}-\sqrt{6}-3\sqrt{2}+\sqrt{6}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}=0$

c) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$

$\left(\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{8-2\sqrt{15}}{4}-\left(\frac{8+2\sqrt{15}}{4}\right)=$

$=-\sqrt{15}$

Questão – 1.42

Solução:

$$\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}\cdot\frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}}=\frac{2-\sqrt[3]{75}+\sqrt[3]{45}-\sqrt[3]{75}+\sqrt[3]{45}}{8}=\frac{1-\sqrt[3]{75}+\sqrt[3]{45}}{4}$$

Questão – 1.43

Solução:

a) $x=\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\cdot\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}=9+4\sqrt{5}$

$y=\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}\cdot\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2}=9-4\sqrt{5}$

$x+y=9+4\sqrt{5}+9-4\sqrt{5}=18$

b) $x^2+y^2=(9+4\sqrt{5})^2\div(9-4\sqrt{5})^2=81+80+81\div80=322$

c) $x^2+y^2+3xy=322+3\cdot(9+4\sqrt{5})\cdot(9-4\sqrt{5})=325$

d) $(x^3+y^3)=(x+y)\cdot(x^2+y^2-xy)=18\cdot(322-1)=5778$

Questão – 1.44

Solução:

a) $A^2 = (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{3}-2)^2 \cdot (\sqrt{\sqrt{3}+2})^2 = (8+4\sqrt{3}) \cdot (7-4\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3}+2) =$
$= 4 \cdot (14-8\sqrt{3}+7\sqrt{3}-12) \cdot (\sqrt{3}+2) = 4 \cdot (2+\sqrt{3}) \cdot (2-\sqrt{3}) = 4$

b) Note que $\begin{cases} \sqrt{6}+\sqrt{2} > 0 \\ \sqrt{3}-2 < 0 \\ \sqrt{\sqrt{3}+2} > 0 \end{cases} \Rightarrow A < 0 \Rightarrow A = -2$

Questão – 1.45

Solução:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \cdot \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots +$
$+ \sqrt{n}-\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \sqrt{n+1}-1$

Questão – 1.52

Solução:

a) $16^{\frac{5}{4}} = (2^4)^{\frac{5}{4}} = 2^5 = 32$

b) $625^{\frac{3}{4}} = (5^4)^{\frac{3}{4}} = 5^3 = 125$

c) $(0{,}001)^{-\frac{2}{3}} = (10^{-3})^{-\frac{2}{3}} = 10^2 = 100$

Questão – 1.53

Solução:

a) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,5} + 16^{0,75} - (0,5)^{-5} + \left(-\frac{3}{7}\right)^{0} \cdot 5 = \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}} + 16^{\frac{3}{4}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} + 1 \cdot 5 =$

$= 4 + 8 - 32 + 5 = -15$

b) $(0,027)^{-\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{-1} + 256^{0,75} - 3^{-1} + (5,5)^{0} = \left(\frac{3}{10}\right)^{-\frac{1}{3}} + 6 + 64 - \frac{1}{3} + 1 =$

$= \frac{10}{3} - \frac{1}{3} + 71 = 74$

$(27)^{-\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{-1} + 256^{0,75} + (5,5)^{0} = 3 + 6 + 64 + 1 = 74$

Questão – 1.54

Solução:

$$\left(\frac{a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{-\frac{5}{6}}}{a^{-\frac{3}{4}} \cdot b^{-\frac{1}{3}}}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(a^{\frac{6}{4}} \cdot b^{-\frac{3}{6}}\right)^{-\frac{2}{3}} = a^{-1} \cdot b^{\frac{1}{3}} = (0,01)^{-1} \cdot (27)^{\frac{1}{3}} = 100 \cdot 3 = 300$$

Questão – 1.55

Solução:

a) $a\sqrt{a\sqrt{a}} = \sqrt{a^3\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a^7} = a^{\frac{7}{4}} \Rightarrow \frac{1}{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \frac{1}{a^{\frac{7}{4}}} = a^{-\frac{7}{4}}$

b) $\sqrt{\sqrt{a} \cdot \frac{a}{\sqrt[3]{a}}} = \sqrt{a^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{a}{a^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{7}{12}}$

c) $\sqrt{a}.\sqrt[3]{a^5}.\sqrt[3]{a^4} = a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{5}{3}}.a^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{3+10+8}{6}} = a^{\frac{7}{2}}$

Questão – 1.56

Solução:

$$\sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}}=\frac{x^{\frac{1}{15}}}{x^{\frac{1}{10}}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{15}}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{10}}}{x^{\frac{1}{6}}}=1$$

Questão – 1.57

Solução:

a) $$\sqrt{a^{-\frac{5}{3}}\cdot b^{3}\cdot c^{-\frac{2}{3}}}+\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{4}\cdot c^{-1}}=a^{-\frac{5}{6}}\cdot b^{\frac{3}{2}}\cdot c^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{6}}\cdot b^{\frac{4}{3}}\cdot c^{-\frac{1}{3}}=$$
$$=a^{-\frac{5}{6}+\frac{1}{6}}\cdot b^{\frac{3}{2}-\frac{4}{3}}\cdot c^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=a^{-\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{1}{6}}$$

b) $$\sqrt{\sqrt[3]{a}\cdot a^{\frac{1}{6}}\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}}=a^{\frac{1}{6}}\cdot a^{\frac{1}{12}}\cdot a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{-\frac{1}{6}}=a^{\frac{2+1+3-2}{12}}=a^{\frac{1}{3}}$$

Questão – 1.58

Solução:

$$\frac{1}{1-x^{\frac{1}{4}}}+\frac{1}{1+x^{\frac{1}{4}}}+\frac{2}{1-x^{\frac{1}{2}}}+\frac{4}{1+x}=\frac{\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)\cdot(1+x)+\left(1-x^{\frac{1}{4}}\right)\cdot(1+x)+2\cdot(1+x)+4\cdot\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)\cdot(1+x)}=$$

$$\frac{1+x^{\frac{1}{4}}+x+x^{\frac{5}{4}}+1-x^{\frac{1}{4}}+x-x^{\frac{5}{4}}+2+2x+4-4x^{\frac{1}{2}}}{\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)\cdot(1+x)}=\frac{\left(8+4x-4x^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)\cdot(1+x)}\cdot\frac{\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)}=$$

$$=\frac{8+4x^{\frac{1}{2}}+4x^{\frac{3}{2}}}{1-x^{2}}$$

Nota: NOTE QUE NOSSO GABARITO DIVERGE DO GABARITO DO LIVRO
Acredito que o enunciado correto seja:

$$\frac{1}{1-x^4}+\frac{1}{1+x^4}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x}=$$

$$\frac{\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)(1+x)\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)+\left(1-x^{\frac{1}{4}}\right)(1+x)\cdot\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)+2\,(1+x)\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)+4\,(1-x)}{(1-x)(1+x)}=$$

$$\frac{\left(1+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{3}{4}}\right)\cdot(1+x)+\left(1-x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{4}}\right)\cdot(1+x)+2\cdot\left(1+x-x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right)+4-4x}{(1-x)\,(1+x)}$$

$$=\frac{\left(1+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{3}{4}}+x+x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{4}}+x^{\frac{7}{4}}\right)+\left(1+x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{3}{4}}+x+x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{5}{4}}-x^{\frac{7}{4}}\right)+2+2x-2x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}+4-4x}{1-x^2}=$$

$$\frac{8}{1-x^2}$$

Questão – 1.59

Solução:

$$x=2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}\Rightarrow x^3=2-3\cdot\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2\cdot 2^{-\frac{1}{3}}+3\cdot\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^2\cdot 2^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-3\cdot 2^{\frac{1}{3}}+3\cdot 2^{-\frac{1}{3}}$$

$$2x^3+6x=3-6\cdot 2^{\frac{1}{3}}+6\cdot 2^{-\frac{1}{3}}+6\cdot 2^{\frac{1}{3}}-6\cdot 2^{-\frac{1}{3}}=3$$

Questão – 1.60

Solução:

a) $$\frac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}\div\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}-1}=\frac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}-1}{1}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}-1}{1}=\frac{(x-1)\cdot\left(x^{\frac{3}{2}}-1\right)}{-x-x^{\frac{1}{2}}-1+x^{\frac{3}{2}}+x+x^{\frac{1}{2}}}=x-1$$

b) $$\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}+\left(a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}=\left((\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}})^2\right)^{-1}\cdot\left((\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}})^2\right)^{-1}=$$

$$= \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{\sqrt{ab}}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2}{\sqrt{ab}}\right)^{-1} = \left(\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{ab}\right)^{-1}+\left(\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{ab}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{ab}{a+b+2\sqrt{ab}}+\frac{ab}{a+b-2\sqrt{ab}} = \frac{ab(a+b-2\sqrt{ab})+ab(a+b-2\sqrt{ab})}{(a+b+2\sqrt{ab})\cdot(a+b-2\sqrt{ab})} = \frac{2ab(a+b)}{(a-b)^2}$$

c) $$\frac{\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x^2b^2}+\sqrt[3]{x^2b}} = \frac{\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{b}+1)}{\sqrt[3]{x^2b}\cdot(\sqrt[3]{b}+1)} = \sqrt[3]{\frac{a}{x^2b}}$$

Questão – 1.61

Solução:

$$y = \left(\frac{1}{1-x^{-\frac{1}{2}}}-\frac{1}{1-x^{-1}}\right)\cdot(x-1) = \frac{x-1}{1-x^{-\frac{1}{2}}}-\frac{x-1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x-1}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}-x = \frac{x-1}{1}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}-x =$$

$$= x+\sqrt{x}-x = \sqrt{x}$$

Se x = 0,0036, portanto y = 0,06

Questão – 1.62

Solução:

a) $9^x = 27 \Rightarrow 3^{2x} = 3^3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

b) $32^x = 4 \Rightarrow 2^{5x} = 2^2 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$

c) $64^{\frac{2}{x}} = 16 \Rightarrow 2^{\frac{12}{x}} = 2^4 \Rightarrow 4 = \frac{12}{x} \Rightarrow x = 3$

d) $16^{\frac{3}{x}} = \frac{1}{8} \Rightarrow 2^{\frac{12}{x}} = 2^{-3} \Rightarrow -3 = \frac{12}{x} \Rightarrow x = -4$

e) $\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{2}{x}} = 25 \Rightarrow 25^{-\frac{2}{x}} = 25^1 \Rightarrow 1 = -\frac{2}{x} \Rightarrow x = -2$

f) $100^{\frac{3}{2}} = 10^x \Rightarrow 10^3 = 10^x \Rightarrow x = 3$

Questão – 1.63

Solução:

a) $0^{\sqrt{2}} - 1^{\sqrt{5}} + 7^{-\sqrt{3}} \cdot 7^{\sqrt{3}} = 0 - 1 + 7^0 = 0 - 1 + 1 = 0$

b) $\dfrac{\left(5^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt[3]{5}}}{25^{\sqrt[6]{3,125}}} = \dfrac{5^{\sqrt{2}\,\sqrt[3]{5}}}{\left(5^2\right)^{\sqrt[6]{3,125}}} = \dfrac{5^{\sqrt[6]{2^3 \cdot 5^2}}}{5^{2\sqrt[6]{\frac{5^2}{2^3}}}} = \dfrac{5^{\sqrt[6]{2^3\,5^2}}}{5^{\sqrt[6]{\frac{5^2\,2^6}{2^3}}}} = \dfrac{5^{\sqrt[6]{2^3 \cdot 5^2}}}{5^{\sqrt[6]{2^3 \cdot 5^2}}} = 1$

c) $\left(3^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} \cdot 9^{\sqrt{6}} \div 3^3 = 3^{\sqrt{6}+3} \cdot 3^{2\sqrt{6}} \div 3^3 = 3^{3\sqrt{6}} = 27^{\sqrt{6}}$

d) $\left[\dfrac{(27^{\sqrt{12}} \cdot 3^{\sqrt{2}} \cdot 3^{\sqrt{45}})}{9^{\sqrt{27}} \cdot 3^{\sqrt{75}}}\right]^{\sqrt{2}} = \left[\dfrac{(3^{6\sqrt{3}} \cdot 3^{\sqrt{2}} \cdot 3^{3\sqrt{5}})}{3^{6\sqrt{3}} \cdot 3^{5\sqrt{3}}}\right]^{\sqrt{2}} = \left[\dfrac{(3^{\sqrt{2}} \cdot 3^{3\sqrt{5}})}{3^{5\sqrt{3}}}\right]^{\sqrt{2}} =$

$= \dfrac{(3^2 \cdot 3^{3\sqrt{10}})}{3^{5\sqrt{6}}} = 3^{2+3\sqrt{10}-5\sqrt{6}}$

Questão – 1.64

Solução:

$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$

$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$

$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$

.....

Daí temos que:

$3^{1,4} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,5}$

$3^{1,41} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,42}$

$3^{1,414} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,415}$

$3^{1,4141} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,4142}$

.....

Assim temos que:

$4{,}655 < 3^{\sqrt{2}} < 5{,}196$

$4{,}706 < 3^{\sqrt{2}} < 4{,}758$

$4{,}727 < 3^{\sqrt{2}} < 4{,}732$

$4{,}7282 < 3^{\sqrt{2}} < 4{,}7287$

Portanto uma boa aproximação para $3^{\sqrt{2}}$ é 4,729

Capítulo 2

Capítulo 2

Exercícios Propostos

Questão – 2.6

Solução 1:

Usando a formula da soma dos termos da P.A temos que

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = \frac{(2+2n)\cdot n}{2} = n\cdot(n+1)$$

Solução 2:

Para n = 1 temos que:

$2 = 1\cdot 2$

Para n = k temos que:

$2 + 4 + 6 + \ldots + 2k = k\cdot(k+1)$ (H.I.)

Para n = k + 1 temos que:

$2 + 4 + 6 + \ldots + 2k + 2k + 2 = k\cdot(k+1) + 2\cdot(k+1) = (k+1)\cdot(k+2)$

Questão – 2.7

Solução:

Para n = 1 temos que:

$$1^2 = \frac{(1)\cdot(2)\cdot(3)}{6} = 1$$

Para n = k temos que:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{(k)\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}\ \text{(H.I.)}$$

Para n = k + 1 temos que:

$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 =$

$$= \frac{(k)\cdot(k+1)\cdot(2k+1)+6\cdot(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)\cdot((k)(2k+1)+6k+6)}{6} = \frac{(k+1)\cdot(k+2)(2k+3)}{6}$$

Questão – 2.8

Solução:

Para n = 5 temos que: $\frac{(5-4)\cdot(5-3)^2\cdot(5-2)}{12} = 1$

Para n = k temos que:

$$1+5+14+\ldots+\frac{(k-4)\cdot(k-3)\cdot(2k-7)}{6}=\frac{(k-4)\cdot(k-3)^2\cdot(k-2)}{12}\ (\text{H.I.})$$

Para n = k + 1 temos que:

$$1+5+14+\ldots+\frac{(k-4)\cdot(k-3)\ (2k-7)}{6}+\frac{(k-3)\ (k-2)\cdot(2k-5)}{6}=\frac{(k-4)\cdot(k-3)^2\cdot(k-2)}{12}+$$

$$\frac{(k-3)\cdot(k-2)\cdot(2k-5)}{6}=\frac{(k-4)\cdot(k-3)^2\cdot(k-2)}{12}+\frac{2\cdot(k-3)\ (k-2)\cdot(2k-5)}{12}=$$

$$\frac{(k-3)\cdot(k-2)\cdot((k-4)\ (k-3)+4k-10)}{12}=\frac{(k-3)\cdot(k-2)\cdot(k^2-3k+2)}{12}$$

$$=\frac{(k-3)\ (k-2)\cdot(k-1)\cdot(k-2)}{12}=\frac{(k-3)\ (k-2)^2\cdot(k-1)}{12}$$

Questão – 2.9

Solução:

Para n = 1 temos que:

$$1^2=1\cdot 2=\frac{(1)\cdot(2)\cdot(3)}{3}=2$$

Para n = k temos que:

$$1\,2+2\cdot 3+\ldots+k\cdot(k+1)=\frac{(k)\cdot(k+1)\cdot(k+2)}{3}\ (\text{H.I.})$$

Para n = k + 1 temos que:

$$1\,2+2\cdot 3+\ldots+k\cdot(k+1)+(k+1)\cdot(k+2)=$$

$$\frac{(k)\cdot(k+1)\cdot(k+2)}{3}+(k+1)\cdot(k+2)=\frac{(k)\ (k+1)\cdot(k+2)}{3}+\frac{3\cdot(k+1)\cdot(k+2)}{3}=$$

$$=\frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)}{3}$$

Questão – 2.10 - IDEM AO 3.16 LETRA C

Questão – 2.11

Solução:

Para n = 1 temos que: $\frac{(1)\cdot(2)}{2} = 1$

Para n = k temos que: $1^2 - 2^2 + ... + (-1)^{k-1} \cdot k^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(k)\cdot(k+1)}{2}$ (H.I.)

Para n = k + 1 temos que:

$1^2 - 2^2 + ... + (-1)^{k-1} \cdot k^2 + (-1)^k \cdot (k+1)^2 =$

$= (-1)^{k-1} \frac{(k)\cdot(k+1)}{2} + (-1)^k \cdot (k+1)^2 = \frac{(-1)^{k-1} \cdot ((k)\cdot(k+1)) + 2\cdot(-1)^k \cdot (k+1)^2}{2}$

$= \frac{(-1)^{k-1} \cdot ((k)\cdot(k+1)) + 2\cdot(-1)^k \cdot (k+1)^2}{2} = \frac{(-1)^k \cdot ((k+1)\cdot(k+2))}{2}$

Questão – 2.12

Solução:

Para n = 1 temos que:

$\frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2}$

Para n = k temos que:

$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + ... + \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{k+2}{2^k}$ (H.I.)

Para n = k + 1 temos que:

$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + ... + \frac{k}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{k+2}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 + \frac{-2k-4+k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{k+3}{2^{k+1}}$

Questão – 2.13

Solução:

Para n = 1 temos que:

$x_1 = 1 = 2^0 = 2^{1-1}$

Para n = k temos que:

$x_k = 2^{k-1}$ (H.I.)

Para n = k + 1 temos que:

$x_{k-1} = 2x_k = 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$

Questão – 2.14

Solução:

$n = 1 \Rightarrow 2^1 > 1^2$
$n = 2 \Rightarrow 2^2 = 2^2$
$n = 3 \Rightarrow 2^3 < 3^2$
$n = 4 \Rightarrow 2^4 = 4^2$
Agora provar que se $n \geq 5$ a desigualdade é verdadeira
Antes vamos provar um lema
Lema: $k^2 > 2k + 1$ para todo $k > 3$
Seja $f(x) = x^2 - 2x - 1$
$f(x) > 0 \Rightarrow x > 1+\sqrt{2}$ ou $x < 1-\sqrt{2}$, portanto se $x > 3$ então $f(x) > 0$, logo $k^2 > 2k + 1$ para todo $k > 3$ e isso prova o lema

Agora vamos voltar ao nosso problema
Para $n = 5$ temos que:
$2^5 > 5^2$
Para $n = k$ temos que:
$2^k > k^2$ (H.I.)
Para $n = k + 1$ temos que:
$2^{k+1} = 2^k + 2^k > k^2 + k^2$
Pelo lema sabemos que $k^2 > 2k + 1$, portanto temos que:
$2^{k+1} = 2^k + 2^k > k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$

Questão – 2.16

Solução:

Para $n = 1$ temos que:
$10^1 - 1 = 9$
Para $n = k$ temos que:
$10^k - 1$ é divisível por 9 (H.I.)
Para $n = k + 1$ temos que:
$(10^k - 1)\cdot(10 - 1)$ é divisível por 9, portanto temos que
$10^{k+1} - 10^k - 10 + 1$ é divisível por 9
Note que $-(10^k - 1)$ e -9 são divisíveis por 9, logo $10^{k-1} - 1$ é divisível por 9 pois
$10^{k+1} - 10^k - 10 + 1 = (10^{k+1} - 1) - (10^k - 1) - 9$

Questão – 2.17

Solução:

Para n = 1 temos que:
$1^3 + 5 \cdot 1 = 6$
Para n = k temos que:
$k^3 + 5 \cdot k$ é divisível por 6 (H.I.)
Para n = k + 1 temos que:
$(k + 1)^3 + 5 \cdot (k + 1) = k^3 + 5k + 3k^2 + 3k + 6$ é divisível por 6,pois
$k^3 + 5k$ é divisível por 6 e $3k^2 + 3k + 6 = 3 \cdot (k + 1) \cdot (k + 2)$ é divisível por 6, pois (k + 1) ou (k + 2) é par

Questão – 2.18

Solução:

Para n = 1 temos que:
$2^1 \cdot 3^3 + 1 = 55$
Para n = k temos que:
$2^{2k-1} \cdot 3^{k+2} + 1$é divisível por 11 (H.I.)
Para n = k + 1 temos que:
$(2^{2k-1} \cdot 3^{k+2} + 1) \cdot (2^2 \cdot 3 - 1)$ é divisível por 11
$(2^{2k-1} \cdot 3^{k+2} + 1) \cdot (2^2 \cdot 3 - 1) = 2^{2k+1} \cdot 3^{k+3} - 2^{2k-1} \cdot 3^{k+2} + 11$
Como $2^{2k-1} \cdot 3^{k+2}$ e 11 são divisíveis por 11 então $2^{2k+1} \cdot 3^{k+3}$ é divisível por 11

EXERCICIOS SUPLEMENTARES

Questão – I.1

Solução:

$$y = \frac{\left[\left(a^m\right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{q}{r}}\right]^{nr}}{\left[\sqrt[q]{b^m} \cdot \sqrt[m]{b^r}\right]^{mq}} \div \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{-p}\right]^r = \frac{\left[(a)^{\frac{m}{r}} \cdot (a)^{\frac{q}{r}}\right]^{nr}}{\left[(b)^{\frac{m}{q}} \cdot (b)^{\frac{m}{r}}\right]^{mq}} \cdot \left[\left(\frac{b^{-pr}}{a^{-pr}}\right)\right] = \frac{a^{mn} \cdot a^{qr}}{a^{-pr}} \cdot \frac{b^{-pr}}{b^{m^2} \cdot b^{\frac{m^2 q}{r}}}$$

Na minha opinião o enunciado está errado. Há varias formas de corrigir o enunciado para chegarmos ao gabarito do livro. A forma mais simples para mim é a seguinte:

$$y=\frac{\left[\left(a^m\right)^{\frac{1}{r}}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{q}{n}}\right]^{nr}}{\left[\sqrt[q]{b^m}\cdot\sqrt[n]{b^r}\right]^{nq}}\div\left[\left(\frac{a}{b}\right)^q\right]^r=\frac{\left[(a)^{\frac{m}{r}}\cdot(a)^{\frac{q}{r}}\right]^{nr}}{\left[(b)^{\frac{m}{q}}\cdot(b)^{\frac{r}{n}}\right]^{nq}}\cdot\left[\left(\frac{b^{qr}}{a^{qr}}\right)\right]=\frac{a^{mn}\cdot a^{qr}}{a^{qr}}\cdot\frac{b^{qr}}{b^{mn}\cdot b^{qr}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{mn}$$

Questão – I.2

Solução:

$$\begin{cases}2b=a+c(I)\\ y^2=xz(II)\end{cases}$$

$$x^b\cdot y^c\cdot z^a=x^c\cdot y^a\cdot z^b\Leftrightarrow x^b\cdot\left(y^2\right)^{\frac{c}{2}}\cdot z^a=x^c\cdot\left(y^2\right)^{\frac{a}{2}}\cdot z^b$$

Usando (II) temos que

$$x^b\cdot\left(y^2\right)^{\frac{c}{2}}\cdot z^a=x^c\cdot\left(y^2\right)^{\frac{a}{2}}\cdot z^b\Leftrightarrow x^b\cdot(xz)^{\frac{c}{2}}\cdot z^a=x^c\cdot(xz)^{\frac{a}{2}}\cdot z^b\Leftrightarrow x^b\cdot x^{\frac{c}{2}}z^{\frac{c}{2}}\cdot z^a=$$

$$x^c\cdot x^{\frac{a}{2}}z^{\frac{a}{2}}\cdot z^b\Leftrightarrow x^{\frac{2b+c}{2}}\cdot z^{\frac{2a+c}{2}}=x^{\frac{2c+a}{2}}\cdot z^{\frac{2b+a}{2}}$$

Usando (I) temos que:

$$x^{\frac{2b+c}{2}}\cdot z^{\frac{2a+c}{2}}=x^{\frac{2c+a}{2}}\cdot z^{\frac{2b+a}{2}}\Leftrightarrow x^{\frac{a+2c}{2}}\cdot z^{\frac{2a+c}{2}}=x^{\frac{2c+a}{2}}\cdot z^{\frac{2a+c}{2}}$$

Portanto a identidade é valida

Questão – I.3

Solução:

a) $$\frac{(2+\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{(2+\sqrt{3})^2-(2+\sqrt{3})+1}}=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6+3\sqrt{3}}}$$

Note que:

$$(3+\sqrt{3})^2 = 12+6\sqrt{3} = 2\cdot(6+3\sqrt{3}) \Rightarrow \sqrt{6+3\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Portanto temos que:

$$\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6+3\sqrt{3}}} = \frac{3+\sqrt{3}}{\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

b) $$\frac{(2-\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{(2-\sqrt{3})^2-(2-\sqrt{3})+1}} = \frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{6-3\sqrt{3}}}$$

Note que:

$$(3-\sqrt{3})^2 = 12-6\sqrt{3} = 2\cdot(6-3\sqrt{3}) \Rightarrow \sqrt{6-3\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Portanto temos que:

$$\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{6+3\sqrt{3}}} = \frac{-3+\sqrt{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2}$$

Questão – I.4

Solução:

Vamos dividir em 3 casos

• Caso 1: $x \leq -1$

Se $x \leq -1$ então $x+1 \leq 0$ e $x-1 \leq 0$ logo $\sqrt{(x-1)^2} = 1-x$ e $\sqrt{(x+1)^2} = -1-x$ assim temos que:

$$y = \sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2} = -1-x-(1-x) = -2$$

• Caso 2: $-1 \leq x \leq 1$

Se $-1 \leq x \leq 1$ então $x+1 \geq 0$ e $x-1 \leq 0$ logo $\sqrt{(x-1)^2} = 1-x$ e $\sqrt{(x+1)^2} = x+1$ assim temos que:

$$y = \sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2} = x+1-(1-x) = 2x$$

• Caso 3: $x \geq 1$

Se $x \geq 1$ então $x + 1 \leq 0$ e $x - 1 \geq 0$ logo $\sqrt{(x-1)^2} = x-1$ e $\sqrt{(x+1)^2} = x+1$ assim temos que:

$$y = \sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2} = x+1-(x-1) = 2$$

Questão – I.5

Solução:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{7}$$

Questão – I.6

Solução:

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

Questão – I.7

Solução:

Como α e β são raízes do polinômio temos que:

$$\begin{cases} a(\alpha)^2 + b\alpha + c = 0 \\ a(\beta)^2 + b\beta + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\left(\alpha^{n+2}\right) + b\alpha^{n+1} + c\alpha^n = 0 \\ a\left(\beta^{n+2}\right) + b\beta^{n+1} + c\beta^n = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\left(\alpha^{n+2} + \beta^{n+2}\right) + b(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) + c(\alpha^n + \beta^n)$$

$$\Rightarrow aS_{n+2} + b \cdot S_{n+1} + c.S_n = 0$$

Questão – I.8

Solução 1:

Antes de fazermos nosso problemas vamos provar 2 lemas

Lema 1: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Prova: $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\cdot\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

Como

$$\sqrt{n+1}>\sqrt{n}\Rightarrow\sqrt{n+1}+\sqrt{n}>\sqrt{n}+\sqrt{n}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}\Rightarrow\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Lema 2: Se n > 2 temos que $2\cdot\sqrt{n+1}-2>\sqrt{n}$

Prova:

$$2\cdot\sqrt{n+1}-2>\sqrt{n}\Leftrightarrow 2\cdot\sqrt{n+1}>\sqrt{n}+2\Leftrightarrow(2\cdot\sqrt{n+1})^2>(\sqrt{n}+2)^2\Leftrightarrow$$

$$4n+4>n+2\sqrt{n}+4\Leftrightarrow 3n>2\sqrt{n}\Leftrightarrow 9n^2-4n>0\Leftrightarrow\begin{cases}n>\dfrac{9}{4}\\ n<0\end{cases}$$

Agora vamos ao nosso problema

Para n = 2 temos que 1,5 > $\sqrt{2}$

Para n > 2 pelo lema 1 temos que:

$$\sqrt{2}-\sqrt{1}<\frac{1}{2\sqrt{1}}$$

$$\sqrt{3}-\sqrt{2}<\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{4}-\sqrt{3}<\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{5}-\sqrt{4}<\frac{1}{2\sqrt{4}}$$

.....

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Somando membro a membro, temos que

$$\sqrt{n+1}-1<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\Rightarrow$$

$$2\left(\sqrt{n+1}\right)-2<\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Pelo lema 2 temos que:

$$\sqrt{n}<2\left(\sqrt{n+1}\right)-2<\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Solução 2:
Vamos provar a desigualdade por indução

Antes vamos provar um lema

Lema: Para todo $k \geq 0$ vale que $\sqrt{k+1}-\sqrt{k} < \frac{1}{\sqrt{k+1}}$

Prova:

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k} < \frac{1}{\sqrt{k+1}} \Leftrightarrow (\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\cdot(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k+1}}\cdot(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})$$

$$\Leftrightarrow k+1-k < \frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} \Leftrightarrow 1 < 1+\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}$$

E esta ultima desigualdade é claramente verdadeira, portanto vale o lema
Agora vamos ao nosso problema

Para n = 2 temos que:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$$

Para n = k temos que:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k} \quad \text{(H.I.)}$$

Para n = k + 1

Pela hipótese de indução e pelo lema temos que:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k}+\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = \left(\sqrt{k+1}\right)$$

Portanto a propriedade é valida

Questão – I.9

Solução:

Antes de provar a nossa desigualdade vamos provar um lema
Lema: Se a e b são reais positivos e n é natural vale que $2^{n-1}(a^n + b^n) > (a + b)^n$
Prova:
Para n = 2 temos que:

$$2\cdot(a^2+b^2) > (a+b)^2 \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

Para n = k temos que:
$2^{k-1}(a^k + b^k) > (a + b)^k$ (H.I.)
Para n = k + 1
$2^{k-1}(a^k + b^k) > (a + b)^k \Leftrightarrow 2^{k-1}(a^k + b^k)(a + b) > (a + b)^k \cdot (a + b) \Leftrightarrow 2^{k-1}(a^{k+1} + b^{k+1} + a^k \cdot b + b^k \cdot a) > (a + b)^{k+1}$

Para provar agora a nossa desigualdade basta provarmos que
$2^k(a^{k+1} + b^{k+1}) > 2^{k-1}(a^{k+1} + b^{k+1} + a^k \cdot b + b^k \cdot a) \Leftrightarrow a^{k+1} + b^{k+1} > a^k \cdot b + b^k \cdot a$
$\Leftrightarrow (a^k - b^k)(a - b) > 0$

E esta ultima desigualdade é valida, pois se a > b então $a^k > b^k$ e os dois termos são positivos
E se a < b então $a^k < b^k$ e os dois termos são negativos logo a desigualdade é valida

Portanto a propriedade é valida
Agora vamos ao nosso problema

Para n = 1 temos que:
$$\frac{1}{2} \cdot (a + b) = \frac{1}{2} \cdot (a + b)$$

Para n = k temos que:
$$\frac{1}{2} \cdot (a^k + b^k) = \left(\frac{1}{2} \cdot (a + b)\right)^k \text{ (H.I.)}$$
Para n = k + 1
$$\frac{1}{2} \cdot (a^{k+1} + b^{k+1}) \geq \left(\frac{1}{2} \cdot (a + b)\right)^{k+1} \Leftrightarrow 2^k \cdot (a^{k+1} + b^{k+1}) \geq (a + b)^{k+1}$$
Note que esta ultima desigualdade é valida pelo lema
Portanto a propriedade é valida

Questão – I.11

Solução 1:

$$\frac{2^2-1}{2^2} \cdot \frac{3^2-1}{3^2} \cdot \frac{4^2-1}{4^2} \cdots \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdots \frac{(n-2) \cdot (n)}{(n-1) \cdot (n-1)} \cdot \frac{(n-1) \cdot (n+1)}{n \cdot n}$$

Note que cada termo do 3 até o n – 1 aparecem duas vezes no numerador e duas vezes no denominador logo vão se cancelar. O 2 aparece uma vez no numerador e duas vezes no denominador, o n aparece uma vez no numerador e duas vezes no denominador e o n + 1 aparece só uma vezes no numerador. Assim temos que todos os números vão se cancelar e vai sobrar o n + 1 no numerador e o 2 e o n no denominador. Portanto temos que:

$$\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\frac{4^2-1}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{n+1}{2n}$$

Solução 2:
Vamos provar isso por indução
Para n = 2 temos que:

$$\frac{2^2-1}{2^2}=\frac{2+1}{2.2}$$

Para n = k temos que:

$$\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\frac{4^2-1}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{k+1}{2k}\ \text{(H.I.)}$$

Para n = k + 1 temos que:

$$\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\frac{4^2-1}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{k^2-1}{k^2}\cdot\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}=\frac{k+1}{2k}\cdot\frac{(k)\cdot(k+2)}{(k+1)\cdot(k+1)}=\frac{(k+2)}{2\cdot(k+1)}$$

Portanto a propriedade é valida

Questão – I.12

Solução:

$n = 1 \Rightarrow 1^3 < 2^1$

$n = 2 \Rightarrow 2^3 > 2^2$

$n = 3 \Rightarrow 3^3 > 2^3$

$n = 4 \Rightarrow 4^3 > 2^4$

$n = 5 \Rightarrow 5^3 > 2^5$

$n = 6 \Rightarrow 6^3 > 2^6$

$n = 7 \Rightarrow 7^3 > 2^7$

$n = 8 \Rightarrow 8^3 > 2^8$

$n = 9 \Rightarrow 9^3 > 2^9$

Vamos prova que se n > 9 a desigualdade é valida

Antes de provarmos esta desigualdade vamos provar um lema
Lema: Para n > 3 vale que $n^3 > 3n^2 + 3n + 1$

Prova:
Para n = 4 temos que $4^3 > 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 1$
Para n = k temos que:
$k^3 > 3k^2 + 3k + 1$ (H.I.)
Para n = k + 1 temos que:
$(k + 1)^3 > 3(k + 1)^2 + 3(k + 1) + 1 \Leftrightarrow$
$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 > 3k^2 + 6k + 3 + 3k + 4 \Leftrightarrow k^3 - 9k - 6 > 0$
Considere $f(x) = x^3 - 9x - 6$

Note $f'(x) = 3x^2 - 9 > 0$ para todo x > 4 logo f(x) é crescente se x > 4 e como f(4) = 22 temos f(x) > 0 para todo x > 4 logo vale que $k^3 - 9k - 6 > 0$ para todo k > 4. Assim temos que $k^3 > 3k^2 + 3k + 1$ para todo k > 4 e isso prova o lema

Agora vamos provar por indução que $n^3 < 2^n$ para todo n > 9
Para n = 10 temos que: $10^3 < 2^{10}$
Para n = k temos que: $k^3 < 2^k$ (H.I.)
Para n = k + 1 temos que:
Pelo lema temos que
$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 < 2k^3$
Assim temos que $(k+1)^3 < 2k^3 < 2^k + 2^k = 2^{k+1}$
Portanto a propriedade é valida

Capítulo 3

Capítulo 3

EXERCICIOS PROPOSTOS

Questão – 3.10

Solução:

a) $a_1 = 3 \cdot 1 = 3$; $a_2 = 3 \cdot 2 = 6$; $a_3 = 3 \cdot 3 = 9$; $a_4 = 3 \cdot 4 = 12$; $a_5 = 3 \cdot 5 = 15$

b) $a_1 = (2 \cdot 1) - 1 = 1$; $a_2 = (2 \cdot 2) - 1 = 3$; $a_3 = (2 \cdot 3) - 1 = 5$; $a_4 = (2 \cdot 4) - 1 = 7$;
$a_5 = (2 \cdot 5) - 1 = 9$

c) $a_1 = (2 \cdot 1) + 1 = 3$; $a_2 = (2 \cdot 2) + 1 = 5$; $a_3 = (2 \cdot 3) + 1 = 7$; $a_4 = (2 \cdot 4) + 1 = 9$;
$a_5 = (2 \cdot 5) + 1 = 11$

d) $a_1 = (2 \cdot 1) = 2$; $a_2 = (2 \cdot 2) = 4$; $a_3 = (2 \cdot 3) = 6$; $a_4 = (2 \cdot 4) = 8$;
$a_5 = (2 \cdot 5) = 10$

e) $a_1 = (2 \cdot 1) + 6 = 8$; $a_2 = (2 \cdot 2) + 6 = 10$; $a_3 = (2 \cdot 3) + 6 = 12$;
$a_4 = (2 \cdot 4) + 6 = 14$; $a_5 = (2 \cdot 5) + 6 = 16$

f) $a_1 = \dfrac{(4 \cdot 1) - 1}{(5 \cdot 1) + 2} = \dfrac{3}{7}$; $a_2 = \dfrac{(4 \cdot 2) - 1}{(5 \cdot 2) + 2} = \dfrac{7}{12}$; $a_3 = \dfrac{(4 \cdot 3) - 1}{(5 \cdot 3) + 2} = \dfrac{11}{17}$;
$a_4 = \dfrac{(4 \cdot 4) - 1}{(5 \cdot 4) + 2} = \dfrac{15}{22}$; $a_5 = \dfrac{(4 \cdot 5) - 1}{(5 \cdot 5) + 2} = \dfrac{19}{27}$

Questão – 3.11

Solução:

a) $a_2 = (3 \cdot (-2) + 2 = -4$; $a_3 = (3 \cdot (-4) + 2 = -10$; $a_4 = (3 \cdot (-10) + 2 = -28$;
$a_5 = (3 \cdot (-28) + 2 = -82$; $a_6 = (3 \cdot (-82) + 2 = -244$

b) $a_3 = 5 + 2 \cdot (-1) = 3$; $a_4 = 3 + 2 \cdot (5) = 13$; $a_5 = 13 + 2 \cdot (3) = 19$;
$a_6 = 19 + 2 \cdot (13) = 45$;

c) $a_1 = 1, a_2 = 1 + 2 = 3, a_3 = 1 + 2 + 3 = 6, a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10,$
$a_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, a_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

Questão – 3.12

Solução:

$$a_5 = \left(\frac{3}{4}\right)\cdot(5) - 1 = \frac{11}{4},\ a_{k+4} = \left(\frac{3}{4}\right)(k+4) - 1 = \frac{3k+8}{4},\ a_{2k} = \left(\frac{3}{4}\right)(2k) - 1 = \frac{3k-2}{2}$$

Questão – 3.14

Solução:

$$b_n = 5a_n + 3a_{n+1} = 5\cdot(2n+3) + 3\cdot(2\cdot(n+1)+3) = 16n+30$$

Questão – 3.15

Solução:

a) $b_n = (a_n)^2 = (2n+4)^2 = 4n^2 + 16n + 16$

b) $c_n = b_{n+1} - b_n = (2(n+1)+4)^2 - (2n+4)^2 = 8n+20$

Questão – 3.16

Solução:

a) $a_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6},\ a_3 = \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{12},\ a_4 = \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{1}{20}$

b) $\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{a(n+1)}{n} + \frac{bn}{n+1} \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow b = -1$

c) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}$$

Questão – 3.17

Solução:

a) $4 = 2\cdot1 + 2$; $6 = 2\cdot2 + 2$; $8 = 2\cdot3 + 2$; $10 = 2\cdot4 + 2$; $12 = 2\cdot5 + 2$ logo $a_n = 2n + 2$

b) $10 = 2\cdot1 + 8$; $12 = 2\cdot2 + 8$; $14 = 2\cdot3 + 8$; $16 = 2\cdot4 + 8$; $18 = 2\cdot5 + 8$ logo $a_n = 2n + 8$

c) $3 = 2\cdot1 + 1$; $5 = 2\cdot2 + 1$; $7 = 2\cdot3 + 1$; $9 = 2\cdot4 + 1$; $11 = 2\cdot5 + 1$ logo $a_n = 2n + 1$

d) $9 = 2\cdot1 + 7$; $11 = 2\cdot2 + 7$; $13 = 2\cdot3 + 7$; $15 = 2\cdot4 + 7$; $17 = 2\cdot5 + 7$ logo $a_n = 2n + 7$

e) $\frac{7}{4} = \frac{(2\cdot1)+5}{(2\cdot1)+2}, \frac{9}{6} = \frac{(2\cdot2)+5}{(2\cdot2)+2}, \frac{11}{8} = \frac{(2\cdot3)+5}{(2\cdot3)+2}, \frac{13}{10} = \frac{(2\cdot4)+5}{(2\cdot4)+2}$, logo

$a_n = \frac{(2n)+5}{(2n)+2}$

f) $1^2 = 1^{1+1}$; $2^3 = 2^{2+1}$; $3^4 = 3^{3+1}$; $4^5 = 4^{4+1}$; $5^6 = 5^{5+1}$, logo $a_n = n^{n+1}$

Questão – 3.18

Solução:

a) $c_n = b_{a_n} = b_{3n+2} = 2\cdot(3n+2) - 1 = 6n + 3$

b) $c_1 = 6\cdot1 + 3 = 9, c_2 = 6\cdot2 + 3 = 15, c_3 = 6\cdot3 + 3 = 20, c_4 = 6\cdot4 + 3 = 27$

Questão – 3.24

Solução:

a) $3\cdot(1) - 6 + 3\cdot(2) - 6 + 3\cdot(3) - 6 + 3\cdot(4) - 6 + 3\cdot(5) - 6 = -3 + 0 + 3 + 6 + 9 = 15$

b) $(-1)^0\cdot2^1 + (-1)^1\cdot2^2 + (-1)^2\cdot2^3 + (-1)^3\cdot2^4 + (-1)^4\cdot2^5 = 2 - 4 + 8 - 16 + 32 = 22$

Questão – 3.26

Solução:

a) $4 = 4\cdot1$; $8 = 4\cdot2$; $12 = 4\cdot3$; $16 = 4\cdot4$; $20 = 4\cdot5$; $24 = 4\cdot6$ logo

$4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 = \sum_{i=1}^{6} 4i$

b) $3 = (4\cdot1) - 1$; $7 = (4\cdot2) - 1$; $11 = (4\cdot3) - 1$; $15 = (4\cdot4) - 1$; logo

$$3+7+11+15 = \sum_{i=1}^{4} 4i-1$$

c) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}, \frac{2}{4} = \frac{2}{2^2}, \frac{3}{8} = \frac{3}{2^3}, \frac{4}{16} = \frac{4}{2^4}, \frac{5}{32} = \frac{5}{2^5}, \frac{6}{64} = \frac{6}{2^6}$;

logo $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{16}\cdot\frac{5}{32}\cdot\frac{6}{64} = \prod_{i=1}^{6}\frac{i}{2^i}$

Capítulo 4

Capítulo 4

EXERCICOS PROPOSTOS

Questão – 4.19

Solução:

a) $a_1 = 3$ e $r = a_2 - a_1 = -4 \Rightarrow a_{15} = a_1 + 14r = 3 + 14\cdot(-4) = -53$

b) $a_1 = 2$ e $r = a_2 - a_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow a_{20} = a_1 + 19\cdot r = 2 + 19\cdot\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{25}{3}$

c) $a_1 = 15$ e $r = a_2 - a_1 = -\frac{57}{4} \Rightarrow a_{30} = a_1 + 29\cdot r = 15 + 29\cdot\left(-\frac{57}{4}\right) = -\frac{1593}{4}$

d) $a_1 = 4$ e $r = a_2 - a_1 = 3\sqrt{2} - 2 \Rightarrow a_{10} = a_1 + 9\cdot r = 4 + 9\cdot\left(3\sqrt{2} - 2\right) = 27\sqrt{2} - 14$

Questão – 4.20

Solução:

$$\begin{cases} a_1 + 3r = 13 \\ a_1 + 5r = 21 \end{cases} \Rightarrow r = 4 \Rightarrow a_1 = 1$$

Questão – 4.21

Solução:

$$\begin{cases} a_1 + 19r = \sqrt{3} - 1 \\ a_1 + 29r = 19\sqrt{3} + 35 \end{cases} \Rightarrow r = \frac{9\sqrt{3} + 18}{5} \Rightarrow a_1 = \sqrt{3} - 1 - 19\cdot\left(\frac{9\sqrt{3} + 18}{5}\right) = \frac{-166\sqrt{3} - 347}{5}$$

$$a_{42} = a_1 + 41r = \frac{-166\sqrt{3} - 347}{5} + 41\cdot\left(\frac{9\sqrt{3} + 18}{5}\right) = \frac{203\sqrt{3} + 391}{5}$$

Questão – 4.22

Solução:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 21 = 1 + (n-1)\cdot n \Rightarrow n^2 - n - 20 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 5 \\ n = -4 \end{cases} \Rightarrow n = 5$$

Questão – 4.23

Solução:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{-3+1}{6} = -\dfrac{2}{6} \\ a_2 = \dfrac{-6+1}{6} = -\dfrac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow r = -\frac{5}{6} - \left(-\frac{2}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

Questão – 4.24

Solução:

Como $r \cdot n = 1 \Rightarrow r = \dfrac{1}{n}$

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow \frac{2}{3} = -\frac{2}{15} + (n-1)\cdot\frac{1}{n} \Rightarrow \frac{2}{3} + \frac{2}{15} = 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow n = 5 \Rightarrow r = \frac{1}{5}$$

Questão – 4.25

Solução:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_7 = a_1 + 6r \Rightarrow \frac{1}{r} = -1 + 6r \Rightarrow 6r^2 - r - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = \dfrac{1}{2} \\ r = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Questão – 4.26

Solução:

$$a_k = a_1 + (k-1)r \Rightarrow \frac{k-5}{k} = 2 + (k-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{2k-10}{2k} = \frac{4k}{2k} - \frac{k^2}{2k} + \frac{k}{2k}$$

$$\Rightarrow k^2 - 3k - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 5 \\ k = -2 \end{cases} \Rightarrow k = 5$$

Questão – 4.27

Solução:

$$\begin{cases} a_1 + 4r = 23 \\ a_1 + 11r = -40 \end{cases} \Rightarrow r = -9 \Rightarrow a_1 = 59$$

$$a_n < 0 \Rightarrow 59 + (n-1)(-9) < 0 \Rightarrow 59 - 9n + 9 < 0 \Rightarrow \frac{68}{9} < n$$

Portanto o primeiro termo negativo é $a_8 = 59 - 9 \cdot 7 = -4$

Questão – 4.28

Solução:

$$\begin{cases} a_1 + (p-1)r = q \\ a_1 + (q-1)r = p \end{cases} \Rightarrow r = \frac{q-p}{p-q} \Rightarrow a_1 = p + q - 1$$

$$a_{p+q} = a_1 + (p+q-1) \cdot r = (p+q-1) + (p+q-1)\left(\frac{q-p}{p-q}\right) =$$

$$= \left(\frac{(p+q-1) \cdot (q-p) + (p+q-1) \cdot (p-q)}{p-q}\right) = 0$$

Questão – 4.29

Solução:

$$\begin{cases} a_1 = 12 \\ a_n = 8536 \end{cases} \Rightarrow 8536 = 12 + (n-1) \cdot 4 \Rightarrow n = 2132$$

Questão – 4.32

Solução:

a) $a_1 = 4 \cdot 1 + 1 = 5$; $a_2 = 4 \cdot 2 + 1 = 9$; $a_3 = 4 \cdot 3 + 1 = 13$; $a_4 = 4 \cdot 4 + 1 = 17$; $a_5 = 4 \cdot 5 + 1 = 21$

b) $b_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$; $b_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$; $b_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$; $b_4 = 2 \cdot 4 + 1 = 9$; $b_5 = 2 \cdot 5 + 1 = 11$

c) $a_{b_n} = 4 \cdot (2n+1) + 1 = 8n + 5$ portanto temos uma P.A. de razão 8

d) $a_{b_1} = 4 \cdot 3 + 1 = 13$; $a_{b_2} = 4 \cdot 5 + 1 = 21$; $a_{b_3} = 4 \cdot 7 + 1 = 29$; $a_{b_4} = 4 \cdot 9 + 1 = 37$

Questão – 4.33

Solução:

$$\begin{cases} a_1 + (n-1)r = 13 \\ a_1 + (k-1)r = 31 \\ a_1 + (p-1)r = 43 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \dfrac{31-13}{k-n} = \dfrac{18}{k-n} \\ r = \dfrac{43-31}{p-k} = \dfrac{12}{p-k} \\ r = \dfrac{43-13}{p-n} = \dfrac{30}{p-n} \end{cases}$$

Portanto a r tem que ser divisível pelo mdc(12,18,30) = 6 logo a razão só pode ser da forma $r = \dfrac{6}{x}$ onde x é um numero natural positivo.

Questão – 4.34

Solução:

a_n = (4,8,12,16,...) é uma P.A. de razão 4 e b_n = (3,8,13,18,...) é uma P.A. de razão 5. Note que $a_2 = b_2$ e mdc(4,5) = 20 portanto $a_7 = b_6 = 28$, $a_{12} = b_{10} = 48$,..., $a_{97} = b_{78} = 388$ logo temos 20 termos em comum.

Questão – 4.35

Solução:

$$\begin{cases} a_1 + (p-1)r = \dfrac{1}{p} \\ a_1 + (q-1)r = \dfrac{1}{q} \end{cases} \Rightarrow r = \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}{p-q} = -\frac{1}{pq} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{p} - (p-1)\cdot\frac{-1}{pq} = \frac{q+p-1}{pq} \Rightarrow a_{p+q}$$

$$= a_1 + (p+q-1)r = \frac{q+p-1}{pq} + (p+q-1)\cdot\left(\frac{-1}{pq}\right) = 0$$

Questão – 4.36

Solução:

$$\begin{cases} a_1 + (p-1)r = A \\ a_1 + (q-1)r = B \end{cases} \Rightarrow r = \frac{A-B}{p-q} \Rightarrow a_1 = A - (p-1)\cdot\left(\frac{A-B}{p-q}\right) =$$

$$= \frac{pA - qA - pA + pB + A - B}{p-q} = \frac{-qA + pB + A - B}{p-q} \Rightarrow a_{p+q} = a_1 + (p+q-1)r =$$

$$= \frac{-qA + pB + A - B}{p-q} + (p+q-1)\cdot\left(\frac{A-B}{p-q}\right) = \frac{-qA + pB + A - B}{p-q} + \frac{pA - pB + qA - qB - A + B}{p-q}$$

$$= \frac{pA - qB}{p-q}$$

Questão – 4.37

Solução:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{2}{5} \\ a_{135} = \frac{28}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{28}{3} = \frac{2}{5} + (135-1)\cdot r \Rightarrow r = \frac{1}{15}$$

Questão – 4.38

Solução:

$$\begin{cases} a_8 = a_1 + 7r = 1 + 7r \\ a_n = a_1 + (n-1)r = nr - r + 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_8}{a_n} = \frac{7r+1}{31-2r} = \frac{5}{9} \Rightarrow 63r + 9 = 155 - 10r \Rightarrow r = 2$$

Questão – 4.39

Solução:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = a_1 + (n-1)r = 200 \end{cases} \Rightarrow 200 = 5 + (n-1)r \Rightarrow r = \frac{195}{n-1} < 3 \Rightarrow n > 66$$

Portanto devemos interpolar no mínimo 64 termos para que a razão seja menor do que 3

Questão – 4.40

Solução:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + r = \dfrac{n^2+2}{n} \\ a_1 = \dfrac{n^2-3}{n} \end{cases} \Rightarrow r = \frac{5}{n} \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)r = \frac{n^2-3}{n} + (n-1)\cdot\frac{5}{n} = \frac{n^2+5n-8}{n}$$

Questão – 4.41

Solução:

$f(n) = f(k) + (n-k)r \Rightarrow f(100) = f(-8) + 108\cdot(-5) = 10 - 540 = -530$

Questão – 4.50

Solução:

$(x - r, x, x+ r)$ P.A. $\Rightarrow x = 5 \Rightarrow (5 - r, 5, 5 + r)$ P.A.

$$\frac{1}{5-r} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5+r} = \frac{33}{40} \Rightarrow \frac{40\cdot(5\cdot(5+r)+(5-r)\cdot(5+r)+5\ (5-r))}{40\cdot(5-r)\cdot5\cdot(5+r)} = \frac{33(5-r)\cdot5\cdot(5+r)}{40\cdot(5-r)\cdot5\cdot(5+r)}$$

$$\Rightarrow 1000 + 200r + 1000 - 40r^2 + 1000 - 200r = 4125 - 165r^2 \Rightarrow 125r^2 - 1125 = 0 \Rightarrow r = \pm 3$$

(2,5,8) ou (8,5,2)

Questão – 4.51

Solução:

$(x - 1, 2x - 4, x^2 - 4x - 1)$P.A.

$$\Rightarrow \frac{x - 1 + x^2 - 4x - 1}{2} = 2x - 4 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$$

Questão – 4.52

Solução:

$(x - 3r, x - r, x + r, x + 3r)$ P.A. $\Rightarrow x - r + x - 3r + x + r + x + 3r = 8 \Rightarrow x = 2$

$(2 - 3r, 2 - r, 2 + r, 2 + 3r)$

P.A $\Rightarrow (2 - 3r)\cdot(2 + 3r) = -140 \Rightarrow 4 - 9r^2 = -140 \Rightarrow 9r^2 = 144 \Rightarrow r = \pm 4$

$(-10, -2, 6, 14)$ ou $(14, 6, -2, -10)$

Questão – 4.53

Solução:

(x – r, x, x + r)P.A.

$\Rightarrow x - r + x + x + r = 21 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow (7 - r)\cdot 7 \cdot (7 + r) = -105 \Rightarrow 49 - r^2 = -15$

$\Rightarrow r^2 = 64 \Rightarrow r = \pm 8$

(–1, 7, 15) ou (15, 7, –1)
Como a P.A. é crescente temos que (–1, 7, 15) é a única solução.

Questão – 4.55

Solução:

(2k, 5k – 4, 7k) P.A. $\Rightarrow \frac{2k + 7k}{2} = 5k - 4 \Rightarrow 9k = 10k - 8 \Rightarrow k = 8$

Logo a sequencia original é (16, 40, 56)

Questão – 4.57

Solução:
(x – 3r, x – r, x + r, x + 3r) P.A.

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 3r + x - r + x + r + x + 3r = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ (x - 3r)^2 + (x - r)^2 + (x + r)^2 + (x + 3r)^2 = 46 \Rightarrow 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 20r^2 = 46 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{3}{2} \end{cases}$$

(– 4, – 1, 2, 5) ou (5, 2, – 1, – 4)

Questão – 4.72

Solução:
$57 - 32 = k - 1 \Rightarrow 26 = k$

Questão – 4.73

Solução:

$a_{40} = a_1 + 39r = -3 + 39\cdot 4 = 153$

$S_{40} = \frac{(a_1 + a_{40})\cdot 40}{2} = \frac{(-3 + 153)\cdot 40}{2} = 3000$

Questão – 4.74

Solução:

$$3 + 0 + (-3) + ... + (-30) = \frac{(-30+3)\cdot 12}{2} = -162$$

Questão – 4.75

Solução:

$$\frac{(a_{10}+a_{40})\cdot 30}{2} = \frac{(10+100)\cdot 30}{2} = 1650$$

Questão – 4.76

Solução:

$$a_{12} + a_{29} = 60 \Rightarrow a_1 + 11r + a_1 + 28r = 60 \Rightarrow 2a_1 + 39r = 60$$

$$S_{40} = \frac{(a_1+a_{40})\cdot 40}{2} = \frac{(2a_1+39r)\cdot 40}{2} = 60\cdot 20 = 1200$$

Questão – 4.77

Solução:

$$\begin{cases} a_1 + 3r = 13 \\ a_1 + 6r = 25 \end{cases} \Rightarrow r = 4 \Rightarrow a_1 = 1 \Rightarrow S_{20} = \frac{(a_1+a_{20})\cdot 20}{2} = (1+1+19\cdot 4)\cdot 10 = 780$$

Questão – 4.78

Solução:

$$\begin{cases} a_1 = 12 \\ a_n = a_1 + (n-1)r = 1412 \end{cases} \Rightarrow 1412 = 12 + (n-1)\cdot 4 \Rightarrow n = 351$$

$$S_{351} = \frac{(a_1+a_{351})\cdot 351}{2} = \frac{(12+1412)\cdot 351}{2} = 249912$$

Questão – 4.79

Solução:

$$\begin{cases} a_1 = 17 \\ a_n = a_1 + (n-1)r = 899 \end{cases} \Rightarrow 899 = 17 + (n-1)\cdot 3 \Rightarrow n = 295$$

$$S_{351} = \frac{(a_1 + a_{295})\cdot 295}{2} = \frac{(17 + 899)\cdot 295}{2} = 135110$$

Questão – 4.80

Solução:

$1 + 2 + ... + n = 480 - 15 \Rightarrow$

$$\frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} = 465 \Rightarrow n^2 + n - 930 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -31 \\ n = 30 \end{cases} \Rightarrow n = 30$$

Questão – 4.81

Solução:

$$\begin{cases} a_1 = 20 \\ S_{10} = 65 \Rightarrow \dfrac{(a_1 + a_{10})\cdot 10}{2} = 65 \Rightarrow 40 + 9r = 13 \Rightarrow r = -3 \end{cases}$$

Questão – 4.82

Solução:

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{5}{2} \\ a_1 = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow r = \frac{11}{6} \Rightarrow a_n = \frac{2}{3} + (n-1)\cdot\frac{11}{6} = \frac{11n-7}{6} \Rightarrow S_n = \frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{11n-7}{6}\right)\right).n}{2} =$$

$$= \left(\frac{11n^2 - 3n}{12}\right)$$

Questão – 4.83

Solução:

correção no enunciado: $S_n = -3n^2 + 4n$

$S_1 = a_1 = -3 \cdot 1^2 + 4.1 = 1$

$S_2 = a_1 + a_2 = -3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 = -4 \Rightarrow a_2 = -5$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = -3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 = -15 \Rightarrow a_3 = -11$

Questão – 4.84

Solução:

a) $S_1 = a_1 = 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$

$S_2 = a_1 + a_2 = 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -1 \Rightarrow a_2 = 0$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 = 1 \Rightarrow a_3 = 2$

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4^2 - 4 \cdot 3 + 1 = 5 \Rightarrow a_3 = 4$

b) Não é P.A, $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$

Questão – 4.85

Solução:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{3} \\ a_2 = 1 \Rightarrow r = a_2 - a_1 = \dfrac{2}{3} \\ S_k = 147 \Rightarrow \dfrac{(a_1 + a_k) \cdot k}{2} = 147 \Rightarrow \left(\dfrac{2}{3} + (k-1) \cdot \dfrac{2}{3}\right) = 147 \Rightarrow \dfrac{2k^2}{3} = 294 \Rightarrow k^2 = 441 \Rightarrow k = 21 \end{cases}$$

Questão – 4.86

Solução:

$a_1 = 41$

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{203}{5} \Rightarrow r = a_2 - a_1 = -\dfrac{2}{5} \\ S_k < 0 \Rightarrow \dfrac{(a_1 + a_k) \cdot k}{2} < 0 \Rightarrow \dfrac{41 + 41 + (k-1) \cdot \left(-\dfrac{2}{5}\right) \cdot k}{2} < 0 \Rightarrow \dfrac{\left(\dfrac{412}{5} - \dfrac{2k}{5}\right) \cdot k}{2} < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \dfrac{412}{5} - \dfrac{2k}{5} < 0 \Rightarrow k > 206 \end{cases}$$

Questão – 4.87

Solução:

$$\begin{cases} a_2 = 5 \\ a_1 = 8 \end{cases} \Rightarrow r = -3 \Rightarrow a_n = 8 + (n-1)\cdot(-3) \Rightarrow -85 = -3n + 11 \Rightarrow n = 32$$

A sequencia dos termos de ordem impar é b_n = (5, – 1, ..., – 82)

$$\begin{cases} b_2 = 2 \\ b_1 = 8 \end{cases} \Rightarrow r = -6 \Rightarrow S_{16} = \frac{(b_1 + b_{16})\cdot 16}{2} = (8 - 82)\cdot 8 = -592$$

Questão – 4.88

Solução:

$$1 + 5 + 9 + 13 + ... + 181 = \frac{(1+181)\cdot 46}{2} = 91\cdot 46 = 4186$$

Questão – 4.89

Solução:

$y_1 = 11$

$y_2 = 11 + 7 = 11 + 7\cdot 2$

$y_3 = 11 + 7\cdot 2 + 7\cdot 3 = 11 + 7\cdot 2 + 7\cdot 3$

.....

$y_n = 11 + 7\cdot 1 + 7\cdot 2 + ... + 7n$

$y_n = 11 + (14 + 21 + ... + 7n) =$

$$= 11 + \frac{(14+7n)\cdot(n-1)}{2} = 11 + \frac{7n^2 - 7n + 14n - 14}{2} = \frac{7n^2 + 7n + 8}{2}$$

Questão – 4.90

Solução:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{n^2+7}{n} \\ a_2 = \dfrac{n^2+9}{n} \Rightarrow r = a_2 - a_1 = \dfrac{2}{n} \\ a_k = a_1 + (k-1)r \Rightarrow \dfrac{n^2+41}{n} = \dfrac{n^2+7}{n} + (k-1)\cdot\dfrac{2}{n} \Rightarrow k = 18 \\ S_k = \dfrac{(a_1 + a_{18})\cdot 18}{2} = \dfrac{(2n^2+48)\cdot 17}{2n} = \dfrac{(18n^2+432)}{n} \end{cases}$$

Questão – 4.94

Solução:

Usando as formulas 4.14 da pagina 98 do livro - texto temos que:

a) $1+2+...+30=\frac{(30)\cdot(31)}{2}=465$

b) $1^2+2^2+...+12^2=\frac{(12)\cdot(13)\cdot(25)}{6}=650$

c) $1^3+2^3+...+10^3=\frac{(10^4)+(2\cdot10^3)+(10^2)}{4}=3025$

Questão – 4.95

Solução:

a) $4^2+7^2+...+46^2=(3+1)^2+(3\cdot2+1)^2+...+(3\cdot15+1)^2=3^2+6^2+...+$

$+45^2+6\cdot(1+2+...+15)+15=9\cdot(1^2+2^2+...+15^2)+6\cdot(1+2+...+15)+15=$

$=9\cdot\left(\frac{15\cdot16\cdot31}{6}\right)+6\cdot\left(\frac{15\cdot16}{2}\right)+15=11160+720+15=11895$

b) $2^3+4^3+...+16^3=2^3\cdot(1^3+2^3+...+8^3)=8\cdot\left(\frac{8^4+2\cdot8^3+8^2}{4}\right)=$

$=2\cdot(4096+1024+64)=10368$

Questão – 4.96

Solução:

a) $1\cdot2+2\cdot3+...+20\cdot21=(1^2+1)+(2^2+2)+...+(20^2+20)=$

$=(1^2+2^2+...+20^2)+(1+2+...+20)=\frac{(20)\cdot(21)\cdot(41)}{6}+\frac{(20)\cdot(21)}{2}=2870+210=3080$

b) $1\cdot 3 + 3\cdot 5 + \ldots + (2n-1)\cdot(2n+1) = (4\cdot 1^2 - 1) + (4\cdot 2^2 - 1) + \ldots + (4n^2 - 1) =$

$= 4\cdot(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) - (1 + 1 + \ldots + 1) = 4\cdot\frac{(n)\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} - n = \frac{4n^3}{3} + 2n^2 - \frac{n}{3}$

c) $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \ldots + n\cdot(n+1)\cdot(n+2) = (1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) + 3\cdot(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) +$

$+ 2\cdot(1 + 2 + \ldots + n) = \frac{(n^4) + (2\cdot n^3) + (n^2)}{4} + 3\cdot\frac{(n)\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} + 2\cdot\left(\frac{(n)\cdot(n+1)}{2}\right) =$

$= \frac{n^4}{4} + \frac{3n^3}{2} + \frac{11n^2}{4} + \frac{3n}{2}$

Questão – 4.97

Solução:

$1^3 + 3^3 + \ldots + (19)^3 = 2^3\cdot(1^3 + 2^3 + \ldots + 10^3) - 12\cdot(1^2 + 2^2 + \ldots + 10^2) +$

$+ 6\cdot(1 + 2 + \ldots + 10) + 10 = 8\cdot\left(\frac{10^4 + 2\cdot 10^3 + 10^2}{4}\right) - 12\cdot\frac{(10)\cdot(11)\cdot(21)}{6} +$

$+ 6\cdot\frac{(10)\cdot(11)}{2} - 10 = 19900$

Capítulo 5

Capítulo 5

EXERCICOS PROPOSTOS

Questão – 5.3

Solução:

a) $\dfrac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{10}}{2}} = \dfrac{2}{\dfrac{7}{20}} = \dfrac{40}{7}$

b) $\dfrac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{-4}+\dfrac{1}{8}}{3}} = \dfrac{3}{\dfrac{3}{8}} = 8$

Questão – 5.4

Solução:

$$a_1 = \frac{2}{3}; a_2 = \frac{5}{2} \Rightarrow r = \frac{5}{2} - \frac{2}{3} = \frac{11}{6} \Rightarrow a_{20} = a_1 + 19r \Rightarrow a_{20} = \frac{2}{3} + 19 \cdot \left(\frac{11}{6}\right) = \frac{213}{6}$$

Logo vigésimo termos da PH é $\dfrac{6}{213}$

Questão – 5.5

Solução:

$a_1 = 3; a_8 = 24 \Rightarrow 7r = 24 - 3 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow a_2 = 6; a_3 = 9;$

$a_4 = 12; a_5 = 15; a_6 = 18; a_7 = 21;$

Logo os termos da PH são $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{6}; \frac{1}{9}; \frac{1}{12}; \frac{1}{15}; \frac{1}{18}; \frac{1}{21}; \frac{1}{24}\right)$

Capítulo 6

CAPÍTULO 6

EXERCICOS PROPOSTOS

Questão – 6.14

Solução:

a) $\begin{cases} a_2 = \dfrac{1}{16} \\ a_1 = \dfrac{1}{32} \end{cases} \Rightarrow q = 2 \Rightarrow a_n = \dfrac{1}{32} \cdot (2)^{n-1} = 2^{n-6}$

b) $a_{10} = 2^{10-6} = 16$

Questão – 6.15

Solução:

$$\begin{cases} a_7 = a_1 \cdot q^6 = \dfrac{243}{64} \\ a_1 = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow q^6 = \frac{a_7}{a_1} = \frac{\frac{243}{64}}{\frac{1}{3}} = \frac{3^6}{2^6} \Rightarrow q = \frac{3}{2}$$

Questão – 6.16

Solução:

$$\begin{cases} q = \dfrac{2}{5} \\ a_1 = \dfrac{25}{8} \end{cases} \Rightarrow a_i = a_1 q^{i-1} \Rightarrow \frac{2^3}{5^4} = \frac{5^2}{2^3} \cdot \frac{2^{i-1}}{5^{i-1}} \Rightarrow i = 7$$

Questão – 6.17

Solução:

$$\begin{cases} q = -6 \\ a_5 = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow a_8 = a_5 q^3 \Rightarrow a_8 = -\frac{1}{3} \cdot (-6)^3 = 72$$

Questão – 6.18

Solução:

$$\begin{cases} a_3 + a_5 + a_8 = 370 \\ a_4 + a_6 + a_9 = 740 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1q^2 + a_1q^4 + a_1q^7 = 370 \\ a_1q^3 + a_1q^3 + a_1q^8 = 740 \end{cases} \Rightarrow q = 2 \Rightarrow a_1 \cdot (4 + 16 + 128) = 370 \Rightarrow$$

$$a_1 = \frac{370}{148} = \frac{5}{2}$$

Questão – 6.19

Solução:

$$\begin{cases} a_{k-1} = 64x \\ a_{k+2} = -27x \end{cases} \Rightarrow a_{k+2} = a_{k-1}q^3 \Rightarrow -27x = 64x \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{(-3)^3}{(4)^3} \Rightarrow q = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow a_{k+4} = a_{k+2}q^2 = -27x \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{243}{16}x$$

Questão – 6.20

Solução:

a) $\begin{cases} a_2 = \frac{1}{4} \\ a_1 = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow q = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

b) $\begin{cases} a_2 = \frac{5}{2} \\ a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow q = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

c) $\begin{cases} a_2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{4} \\ a_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \end{cases} \Rightarrow q = \frac{\frac{3-2\sqrt{2}}{4}}{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{4}{2-\sqrt{2}} =$

$$= \frac{(3-2\sqrt{2}) \cdot (2+\sqrt{2})}{2 \cdot (2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

Questão – 6.21

Solução:

$M = 500000 \cdot (1{,}2)^3 = 864000$

Questão – 6.22

Solução:

$$\begin{cases} a_k = 4^{3k-2} \\ a_{k+1} = 4^{3(k+1)-2} = 4^{3k+1} \end{cases} \Rightarrow q = \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{4^{3k-2}}{4^{3k+1}} = \frac{1}{64}$$

Note que $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ é constante para todo k natural, portanto a sequencia é uma P.G.

Questão – 6.23

Solução:

$$\begin{cases} c_k = b_{3k-4} = 5 \cdot 2^{3k-4} \\ c_{k+1} = b_{3k-1} = 5 \cdot 2^{3k-1} \end{cases} \Rightarrow q = \frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{5 \cdot 2^{3k-1}}{5 \cdot 2^{3k-4}} = 8$$

Note que $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ é constante para todo k natural, portanto a sequencia é uma P.G.

Questão – 6.24

Solução:

$$\begin{cases} a_{m+n} = A \\ a_{m-n} = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \cdot q^{m+n-1} = A \\ a_1 \cdot q^{m-n-1} = B \end{cases} \Rightarrow A \cdot B = (a_1)^2 \cdot q^{2m-2} \Rightarrow \sqrt{A \cdot B} = (a_1) \cdot q^{m-1} = a_m$$

Questão – 6.33

Solução:

a) $\sqrt{27 \cdot 12} = \sqrt{324} = 18$

b) $\sqrt[4]{6 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 24} = \sqrt[4]{2 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 3} = 4\sqrt[4]{18}$

Questão – 6.34

Solução:

$$(x+8)^2 = (x+44)\cdot(x-4) \Rightarrow x^2 + 16x + 64 = x^2 + 40x - 176 \Rightarrow x = 10$$

Questão – 6.35

Solução:

$$\left(\frac{x}{q}, x, xq\right) \text{P.G.} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = -9261 \Rightarrow x = -21 \\ \frac{x}{q} + x = -17 \Rightarrow \frac{-21}{q} = 4 \Rightarrow q = \frac{-21}{4} \end{cases}$$

Portanto $(4, -21, \frac{441}{4})$

Nota: Observe que o gabarito do livro está errado pois o gabarito é (3, – 21, 147) daí temos que 3 + (– 21) = –18.

Questão – 6.36

Solução:

$$\begin{cases} a+b+c = \frac{7}{2} \\ a^2+b^2+c^2 = \frac{21}{4} \Rightarrow (a+b+c)^2 = \frac{49}{4} \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2b\cdot(a+b+c) = \frac{49}{4} \\ b^2 = ac \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2b\cdot\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{49}{4} - \frac{21}{4} \Rightarrow 7b = 7 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow \begin{cases} a+c = \frac{5}{2} \\ a\cdot c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2,\ c = \frac{1}{2} \\ c = 2,\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Portanto a P.G. é $(2,1, \frac{1}{2})$ ou $(\frac{1}{2}, 1, 2)$

Questão – 6.37

Solução:

$$(a,b,c)\ \text{P.A.} \Rightarrow \frac{a+c}{2} = b \Rightarrow a+c = 2b \Rightarrow 3b = 24 \Rightarrow b = 8$$

$$(a,b,c)\ \text{P.G.} \Rightarrow a.(10c-12) = 16^2 \Rightarrow 10a\cdot c - 12a = 256$$

(a,b,c) P.A.

$$\begin{cases} a+c = 16 \Rightarrow \\ 10ac - 12a = 256 \end{cases} \Rightarrow 10a\cdot(16-a) - 12a = 256 \Rightarrow -10a^2 + 148a - 256 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = \frac{64}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 14 \\ c = \frac{16}{5} \end{cases}$$

Note nossa resposta está correta, pois (2,8,14) P.A de razão 6 e (2,16,128) P.G. de razão 8 e $(\frac{64}{5}, 8, \frac{16}{5})$ P.A. de razão $-\frac{24}{5}$ e $(\frac{64}{5}, 16, 20)$ P.G. de razão $\frac{5}{4}$

Questão – 6.38

Solução:

$$(2^x, 3^x, 5^x)\ \text{P.G.} \Rightarrow 3^{2x} = 10^x \Rightarrow x = 0$$

Questão – 6.39 – Veja o exercício resolvido 6.30

Questão – 6.40

Solução:

$$(a, aq, aq^2) \Rightarrow aq^2 < 4aq - 3a \Rightarrow q^2 - 4q + 3 < 0 \Rightarrow 1 < q < 3$$

Questão – 6.49

Solução:

$$\begin{cases} a_2 = -1 \\ a_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow q = -2 \Rightarrow P_{22} = (a_1)^{22}\cdot q^{\frac{22.23}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{22}\cdot(-2)^{253} = -2^{231}$$

Questão – 6.50

Solução:

$$\frac{1}{2}-1+2-4+8-16=-\frac{21}{2}$$

Questão – 6.51

Solução:

$$\begin{cases} a_2 = 2 \\ a_1 = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow q = 3 \Rightarrow S_{10} = a_1 \cdot \left(\frac{q^{10}-1}{q-1}\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3^{10}-1}{3-1}\right) = \frac{3^{10}-1}{3}$$

Questão – 6.52

Solução:

$$\begin{cases} q = 2 \\ S_6 = 63 \end{cases} \Rightarrow S_6 = a_1 \cdot \left(\frac{q^6-1}{q-1}\right) = a_1 \cdot \left(\frac{2^6-1}{2-1}\right) \Rightarrow 63 = a_1 \cdot 63 \Rightarrow a_1 = 1$$

Questão – 6.53

Solução:

$$\begin{cases} a_1 q = 3 \\ a_1 + q = \dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow q \cdot \left(\frac{7}{2} - q\right) = 3 \Rightarrow -2q^2 + 7q - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = \dfrac{3}{2} \\ q = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_1 = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_5 = 2 \cdot \dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^5 - 1}{\frac{3}{2} - 1} \\ S_5 = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{(2)^5 - 1}{2-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_5 = \dfrac{211}{8} \\ S_5 = \dfrac{93}{2} \end{cases}$$

Questão – 6.54

Solução:

$$S_n = 1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

Questão – 6.55

Solução:

$$A = 1 + 3 + \ldots + 3^{n-1} = 1 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{3^n - 1}{2} \Rightarrow 2A + 1 = 3^n$$

$$1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3^{n-1}} = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{\frac{1 - 3^n}{3^n}}{-\frac{2}{3}} = \frac{(3^n - 1) \cdot 3}{2} \cdot \frac{1}{3^n} = \left(\frac{3A}{2A + 1}\right)$$

Questão – 6.56

Solução:

$$(2^0 \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-2} \cdot 2^{-3}) + (2^0 \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-2} \cdot 2^{-3} \cdot 2^{-4} \cdot 2^{-5}) = 2^{-6} + 2^{-15} = \frac{2^9 + 1}{2^{15}} = \frac{513}{32768}$$

Questão – 6.57

Solução:

$$S_k = 3 \cdot \frac{4^k - 1}{4 - 1} \Rightarrow 4095 = 4^k - 1 \Rightarrow k = 6$$

Questão – 6.65

Solução:

$$\begin{cases} a_2 = -45 \\ a_1 = 60 \end{cases} \Rightarrow q = -\frac{3}{4} \Rightarrow S = \frac{a_1}{1 - q} = \left(\frac{60}{1 + \frac{3}{4}}\right) = \frac{240}{7}$$

Questão – 6.66

Solução:

$$\begin{cases} a_2 = \frac{3}{4} \\ a_1 = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow q = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{a_1}{1-q} = \left(\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}} \right) = 3$$

Questão – 6.67

Solução:

$$\begin{cases} a_2 = \frac{1}{a} \\ a_1 = \frac{a+1}{a^2} \end{cases} \Rightarrow q = \frac{a}{a+1} \Rightarrow S = \frac{a_1}{1-q} = \left(\frac{\frac{a+1}{a^2}}{1-\frac{a}{a+1}} \right) = \left(\frac{a+1}{a} \right)^2$$

Questão – 6.68

Solução:

$$\begin{cases} a_2 = \frac{\pi}{18} \\ a_1 = \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow q = \frac{1}{3} \Rightarrow S = \frac{\frac{\pi}{6}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Questão – 6.69

Solução:

$$S = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow 10 = \left(\frac{6}{1-q} \right) \Rightarrow 1-q = \frac{3}{5} \Rightarrow q = \frac{2}{5}$$

Questão – 6.70

Solução:

$$S = (x + x^2 + x^3 + \ldots) - \left(\frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \frac{x}{27} + \ldots\right) = \frac{x}{1-x} - \frac{\frac{x}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{x}{1-x} - \frac{x}{2} = \frac{x + x^2}{2(1-x)}$$

Nota: Observe que este gabarito não condiz com o do livro.
Para acharmos o gabarito do livro deviamos ter

$$S = (x + x^2 + x^3 + \ldots) + \left(\frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \frac{x}{27} + \ldots\right)$$

$$S = (x + x^2 + x^3 + \ldots) + \left(\frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \frac{x}{27} + \ldots\right) = \frac{x}{1-x} + \frac{\frac{x}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{x}{1-x} + \frac{x}{2} = \frac{3x - x^2}{2(1-x)}$$

Questão – 6.71

Solução:

$(x, xq, xq^2, xq^3, \ldots)$ P.G.

$$\Rightarrow \begin{cases} x + xq^2 + xq^4 + \ldots = 54 \\ xq + xq^3 + xq^5 + \ldots = 36 \end{cases} \Rightarrow \frac{x + xq^2 + xq^4 + \ldots}{xq + xq^3 + xq^5 + \ldots} = \frac{54}{36} \Rightarrow q = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1-\frac{4}{9}} = 54 \Rightarrow x = 30$$

$$(30, 20, \frac{40}{3}, \ldots)$$

Questão – 6.72

Solução:

correção no enunciado: $x + \frac{x}{4} + \frac{x}{16} + \frac{x}{64} + \ldots = 80$

$$x + \frac{x}{4} + \frac{x}{16} + \frac{x}{64} + \ldots = 80 \Rightarrow \frac{x}{1-\frac{1}{4}} = 80 \Rightarrow x = 60$$

Questão – 6.73

Solução:

$$60 + 30 + 15 + ... = \frac{60}{1-\frac{1}{2}} = 120$$

Questão – 6.74

Solução:

$$\sqrt{a^3 \cdot \sqrt{b^5 \cdot \sqrt{a^3 \cdot \sqrt{b^5}}...}} = \left(a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{3}{8}} \cdot a^{\frac{3}{32}}...\right) \cdot \left(b^{\frac{5}{4}} \cdot b^{\frac{5}{16}} \cdot b^{\frac{5}{64}}...\right) = a^{\frac{3}{2}+\frac{3}{8}+\frac{3}{32}+...} \cdot b^{\frac{5}{4}+\frac{5}{16}+\frac{5}{64}+...} =$$

$$= a^{\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{4}}} \cdot b^{\frac{\frac{5}{4}}{1-\frac{1}{4}}} = a^2 \cdot b^{\frac{5}{3}}$$

Questão – 6.75

Solução:

correção no enunciado:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+...\right)+...+\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{(2^n+1)^2}+\frac{1}{(2^n+1)^3}+...$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+... = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+... = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$

.....

$$\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{(2^n+1)^2}+\frac{1}{(2^n+1)^3}+... = \frac{\frac{1}{2^n+1}}{1-\frac{1}{2^n+1}} = \frac{1}{2^n}$$

Logo $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

Questão – 6.78

Solução:

$S = 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot(3^2) + \ldots + (n)\cdot 3^{n-1}$

$\Rightarrow 3S = 3\cdot 1 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3^3 + \ldots + n\cdot 3^n \Rightarrow 2S = n\cdot 3^n - 1 - (3 + 9 + 27 + \ldots + 3^{n-1})$

$\Rightarrow 2S = n\cdot 3^n - 1 - \frac{3\cdot(3^n - 1)}{2} \Rightarrow 2S = \frac{2n\cdot 3^n - 2 - (3^n - 3)}{2} \Rightarrow S = \frac{(2n-1)\cdot 3^n + 1}{4}$

Questão – 6.79

Solução:

$S = x + 2\cdot x^2 + 3\cdot x^3 + \ldots +$

$\Rightarrow xS = x^2 + 2\cdot x^3 + 3\cdot x^4 + \ldots + \Rightarrow (1-x)S = x + x^2 + x^3 + \ldots \Rightarrow (1-x)S = \frac{x}{1-x} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \frac{x}{(1-x)^2}$

Questão – 6.80

Solução:

$S = 1 + \frac{3}{3} + \frac{5}{9} + \frac{7}{27} + \ldots \Rightarrow 3S = 3 + 3 + \frac{5}{3} + \frac{7}{9} + \frac{9}{27} + \ldots \Rightarrow 2S = 5 + 2\cdot\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots\right)$

$\Rightarrow 2S = 5 + 2\cdot\left(\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) \Rightarrow S = 3$

Problemas suplementares

Questão – II.1

Solução:

$$\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{7\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+5)}=\frac{1}{4\cdot 3}-\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{4\cdot 5}-\frac{1}{4\cdot 9}+\frac{1}{4\cdot 7}-\frac{1}{4\cdot 11}$$
$$+\ldots+\frac{1}{4\cdot(2n+1)}-\frac{1}{4\cdot(2n+5)}=\frac{1}{4\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5}-\frac{1}{4\cdot(2n+3)}-\frac{1}{4\cdot(2n+5)}=$$
$$=\frac{2}{15}-\frac{1}{4\cdot(2n+3)}-\frac{1}{4\cdot(2n+5)}$$

Questão – II.4

Solução:

$$\begin{cases} x-r+x+x+r=6 \Rightarrow x=2 \\ (x-r)^2+x^2+(x+r)^2=14 \Rightarrow 12+2r^2=14 \Rightarrow r=\pm 1 \end{cases}$$

Portanto a P.A. é (1,2,3) ou (3,2,1)

Questão – II.5

Solução:

correção no enunciado:... e a soma de seus cubos é 275

$$\begin{cases} x-2r+x-r+x+x+r+x+2r=5 \Rightarrow x=1 \\ (x-2r)^3+(x-r)^3+x^3+(x+r)^3+(x+2r)^3=275 \Rightarrow 5+30r^2=275 \Rightarrow r=\pm 3 \end{cases}$$

Portanto a P.A. é (–5,–2,1,4,7) ou (7,4,1,–2,–5)

Questão – II.6

Solução:

$$\begin{cases} a_1+6r=7 \\ a_1\cdot r=\dfrac{11}{8} \end{cases} \Rightarrow (7-6r)\cdot r=\frac{11}{8} \Rightarrow -48r^2+56r-11=0 \Rightarrow \begin{cases} r=\dfrac{11}{12} \\ r=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=\dfrac{3}{2} \\ a_1=\dfrac{11}{2} \end{cases}$$

Questão – II.7

Solução:

$$(-2 + 0 + 2 + ... + 36)^2 = \left(\frac{(-2+36)\cdot 20}{2}\right)^2 = 340^2 = 115600$$

Questão – II.8

Solução:

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11}$

$\Rightarrow a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = 0$

$$\frac{a_1\cdot(q^7-1)}{q-1} = \frac{a_1\cdot(q^{11}-1)}{q-1} \Rightarrow q = -1 \Rightarrow S_{18} =$$

$$= \frac{a_1\cdot(q^7-1)}{q-1} + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16}$$

$+a_{17} + a_{18} = a_1 + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} + a_{17} + a_{18} =$

$$a_1 + q^{11}\cdot(a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + a_1q^5 + a_1q^6) = a_1 + q^{11}\cdot\left(\frac{a_1\cdot(q^7-1)}{q-1}\right) = a_1 - a_1 = 0$$

Questão – II.9

Solução:

$2 + 5 + 8 + ... + x = 126$

$$\Rightarrow \frac{(2+2+(n-1)\cdot(3))\cdot n}{2} = 126 \Rightarrow 3n^2 + n - 252 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 9 \\ n = -\dfrac{84}{9} \end{cases} \Rightarrow n = 9 \Rightarrow x = 26$$

Nota: note que 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 = 126 e 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29 = 155 portanto o gabarito do livro está errado

Questão – II.10

Solução:

$$\begin{cases} x+2r=a+4b \\ x+12r=a+24b \end{cases} \Rightarrow r=2b \Rightarrow x=a \Rightarrow S_{16}=\frac{(a+a+30b)\cdot 16}{2}=16a+240b$$

Questão – II.11

Solução:

$$\begin{cases} x-3r+x-r+x+r+x+3r=22 \\ (x-3r)^2+(x-r)^2+(x+r)^2+(x+3r)^2=166 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{11}{2} \\ 4x^2+20r^2=166 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20r^2=45 \Rightarrow r=\pm\frac{3}{2} \Rightarrow r=-\frac{3}{2}$$

Portanto a P.A. é (10,7,4,1)

Questão – II.12

Solução:

$$\begin{cases} a_1+a_1q=28 \\ a_1{}^2+a_1q^3=175 \end{cases} \Rightarrow q^2=\frac{25}{4} \Rightarrow q=\pm\frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} a_1\cdot\left(1+\frac{5}{2}\right)=28 \Rightarrow a_1=8 \\ a_1\cdot\left(1-\frac{5}{2}\right)=28 \Rightarrow a_1=-\frac{56}{3} \end{cases}$$

Questão – II.13

Solução:

$$\begin{cases} a+b+c=13 \\ a^2+b^2+c^2=91 \Rightarrow 169=a^2+b^2+c^2+2b(a+b+c) \Rightarrow 169=91+26b \Rightarrow b=3 \\ b^2=ac \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+c=10 \\ ac=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1, c=9 \\ c=9, a=1 \end{cases}$$

Questão – II.14

Solução:

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} \\ a_3 = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{6} \end{cases} \Rightarrow q = \frac{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}}{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}-1} = \frac{(3-2\sqrt{2})}{3\cdot(\sqrt{2}-1)}$$

$$\Rightarrow a_1\cdot\left(\frac{(3-2\sqrt{2})}{3\cdot(\sqrt{2}-1)}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot\frac{3\cdot(\sqrt{2}-1)}{(3-2\sqrt{2})} = \frac{3(3-2\sqrt{2})}{2\cdot(3-2\sqrt{2})} = \frac{3}{2}$$

Nota: Minha resposta não confere com a resposta do livro

Se $a_1 = \frac{3}{2}$ e $q = \frac{(3-2\sqrt{2})}{3\cdot(\sqrt{2}-1)} \Rightarrow a_2 = a_1\cdot q = \frac{3}{2}\cdot\frac{(3-2\sqrt{2})}{3\cdot(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ e

$a_3 = a_2\cdot q = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot\frac{(3-2\sqrt{2})}{3\cdot(\sqrt{2}-1)} = \frac{3-2\sqrt{2}}{6}$

Portanto nossa resposta está correta

Agora vejamos o gabarito do livro se $a_1 = 9\cdot(3+2\sqrt{2})$ e $q = \frac{(3-2\sqrt{2})}{3\cdot(\sqrt{2}-1)} \Rightarrow$

$a_2 = a_1\cdot q = 9\cdot(3+2\sqrt{2})\cdot\frac{(3-2\sqrt{2})}{3\cdot(\sqrt{2}-1)} = \frac{3}{(\sqrt{2}-1)} = 3\cdot(\sqrt{2}+1)$ e

$a_3 = a_2\cdot q = 3\cdot(\sqrt{2}+1)\cdot\frac{(3-2\sqrt{2})}{3\cdot(\sqrt{2}-1)}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = (3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) = 1$

Logo a resposta do livro está errada

Questão – II.15

Solução:

$P = 80.000\cdot(1{,}15)^6 = 185044$

Questão – II.16

Solução:

$$S = \frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{32}+\ldots = \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{4}} = \frac{3}{2}\cdot 4 = 6$$

Questão – II.17

Solução:

Correção no enunciado: Considere a sequencia (a_n) definida por :

$$a_n = \sum_{n=i}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

a) $a_1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$

$$a_2 = \frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots = \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}$$

$$a_3 = \frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}\ldots = \frac{\frac{1}{27}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{18}$$

b) $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\sum_{n=k+1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{\left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{3}}\right)}{\left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{k}}{1-\frac{1}{3}}\right)} = \frac{\frac{1}{2\cdot 3^k}}{\frac{1}{2\cdot 3^{k-1}}} = \frac{1}{3}$

Portanto a_n é uma P.G. de razão $\frac{1}{3}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$

Questão – II.18

Solução:

$$S + 4^2 = 16 \cdot (1^2 + 2^2 + ... + 8^2) \Rightarrow S = 16 \cdot \left(\frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6}\right) - 16 = 16 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 17 - 16 = 3248$$

Questão – II.19

Solução:

$$(1^2 + 2^2 + ... + 20^2) + 3 \cdot (1 + 2 + ... + 20) = \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} + \frac{20 \cdot 21}{2} = 70 \cdot 41 + 210 =$$

$$= 2870 + 630 = 3500$$

Questão – II.20

Solução:

a) $b_n = (a_n)^2 = 4 \cdot 4^{2n} = 2^{4n+2}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{4n+6}}{2^{4n+2}} = 16$$

Portanto b_n é uma P.G. de razão 16

b) $$\sum_{n=1}^{10} b_n = 2^6 + 2^{10} + ... + 2^{42} = \frac{2^6 \cdot (2^{40} - 1)}{2^4 - 1} = \frac{64 \cdot (2^{40} - 1)}{15} = \frac{64}{15} \cdot (16^{10} - 1)$$

Questão – II.21

Solução:

a) $$\frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + ... = \frac{\frac{4}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{4}{9}$$

b) $$\frac{25}{100} + \frac{25}{10000} + \frac{25}{100000} + ... = \frac{\frac{25}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{25}{99}$$

c) $$\frac{125}{1000} + \frac{125}{1000000} + \frac{125}{1000000000} + ... = \frac{\frac{125}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{125}{999}$$

Capítulo 7

Capítulo 7

EXERCICOS PROPOSTOS

Questão – 7.9

Solução:

a) $\log_{11}^{121} = x \Rightarrow 11^x = 11^2 \Rightarrow x = 2$

b) $\log_{121}^{11} = x \Rightarrow 121^x = 11 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

c) $\log_{2}^{\frac{1}{32}} = x \Rightarrow 2^x = \frac{1}{32} \Rightarrow x = -5$

d) $\log_{\frac{1}{2}}^{32} = x \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 32 \Rightarrow x = -5$

e) $\log_{\frac{1}{27}}^{\frac{1}{9}} = x \Rightarrow \left(\frac{1}{27}\right)^x = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

f) $\log_{\sqrt[4]{7}}^{\sqrt[3]{7}} = x \Rightarrow (\sqrt[4]{7})^x = \sqrt[3]{7} \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

g) $\log_{25}^{\sqrt[5]{625}} = x \Rightarrow (25)^x = \sqrt[5]{625} \Rightarrow x = \frac{2}{5}$

h) $\log_{a}^{\sqrt{a\sqrt{a}}} = x \Rightarrow (a)^x = a^{\frac{3}{4}} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

i) $\log_{\frac{1}{5}}^{0,2} = x \Rightarrow (0,2)^x = 0,2 \Rightarrow x = 1$

j) $\log_{10}^{0,001} = x \Rightarrow (10)^x = 0,001 \Rightarrow x = -3$

k) $\log_{0,0625}^{0,125} = x \Rightarrow (0,0625)^x = 0,125 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

l) $\log_{0,5625}^{0,75} = x \Rightarrow (0,5625)^x = 0,75 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Questão – 7.10

Solução:

a) $\log_{5}^{x} = 0 \Rightarrow x = 5^0 \Rightarrow x = 1$

b) $\log_3^x = -2 \Rightarrow (3)^{-2} = x \Rightarrow \frac{1}{9} = x$

c) $\log_{\sqrt{3}}^x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}} = x \Rightarrow \sqrt[4]{3} = x$

d) $\log_2^{x+3} = 1 \Rightarrow 2 = x + 3 \Rightarrow -1 = x$

e) $\log_{\sqrt{11}}^{x^2-1} = 2 \Rightarrow (\sqrt{11})^2 = x^2 - 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{3} \\ x = -2\sqrt{3} \end{cases}$

f) $\log_x^3 = 2 \Rightarrow 3 = x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$

Note que $x = -\sqrt{3}$ não é solução pois a base do logaritmo não pode ser zero, portanto $x = \sqrt{3}$ é a única solução

g) $\log_x^2 = -2 \Rightarrow 2 = x^{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Note que $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ não é solução pois a base do logaritmo não pode ser zero, portanto $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ é a única solução

h) $\log_x^{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\sqrt{3} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = 12$

Questão – 7.11

Solução:

a) $\log_{2x}^x = -2 \Rightarrow (2x)^{-2} = x \Rightarrow \frac{1}{4x^2} = x \Rightarrow x = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$

b) $\log_x^{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow (x)^{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow x = 4x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$

Note que x = 0 não é solução pois a base do logaritmo não pode ser zero, portanto $x = \frac{1}{4}$ é a única solução

c) $\log_{x-3}^{4x} = 2 \Rightarrow (x-3)^2 = 4x \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 9 \end{cases}$

Note que x = 1 não é solução pois a base do logaritmo não pode ser negativa, portanto x = 9 é a única solução

d) $\log_{\sqrt{x-3}}^{x^2-2} = 4 \Rightarrow (\sqrt{x-3})^4 = x^2 - 2 \Rightarrow -6x + 11 = 0 \Rightarrow x = \frac{11}{6}$

Note que $x = \frac{11}{6}$ não é solução pois a base do logaritmo não pode ser negativa.

Questão – 7.12

Solução:

a) $3\log_5^x = \log_5^x + 1 \Rightarrow \log_5^{x^3} = \log_5^x + \log_5^5 \Rightarrow \log_5^{x^3} = \log_5^{5x} \Rightarrow x^3 = 5x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \end{cases}$

Como x > 0 temos que $x = \sqrt{5}$ é a única solução

b) $(\log_2^x)^2 - 7 \cdot \log_2^x + 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \log_2^x = 2 \\ \log_2^x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2^2 = 4 \\ x = 2^5 = 32 \end{cases}$

c) $2(\log_2^x)^2 - 5 \cdot \log_2^x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \log_{10}^x = 2 \\ \log_{10}^x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10^2 = 100 \\ x = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} \end{cases}$

Questão – 7.13

Solução:

a) $\log_3^{4x-3} = \log_3^{2x+5} \Rightarrow 4x - 3 = 2x + 5 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$

b) $\log_{10}^{2x-7} = \log_{10}^{x-9} \Rightarrow 2x - 7 = x - 9 \Rightarrow x = 2$

Note que se x = 2 então 2x – 7 = – 3 portanto o logaritmo não existe assim temos que S = ∅

c) $\log_5^{x^2-x} = \log_5^{8x-14} \Rightarrow x^2 - x = 8x - 14 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 7 \end{cases}$

d) $\log_{12}^{x^2-2x} = \log_{12}^{10-5x} \Rightarrow x^2 - 2x = 10 - 5x \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 2 \end{cases}$

Se x = 0 então $x^2 - 2x = 10 - 5x = 0$, portanto não existe o logaritmo
Se x = – 5 então $x^2 - 2x = 10 - 5x = 35$, portanto existe o logaritmo
Assim temos que a única solução é x = – 5

Questão – 7.14

Solução:
Vamos usar 3 propriedades dos logaritmos

I) $a^{\log_a^b} = b$

II) $\log_a^{b^n} = n.\log_a^b$

III) $\log_{a^n}^b = \frac{1}{n} \cdot \log_a^b$

a) Usando a propriedade I temos que: $13^{\log_{13}^5} = 5$
b) Usando a propriedade II temos que:
$4^{\log_2^3} = (2^2)^{\log_2^3} = (2)^{2 \cdot \log_2^3} = (2)^{\log_2^9}$ usando a propriedade I temos que:
$2^{\log_2^9} = 9$

c) Usando a propriedade III temos que:
$7^{\log_{49}^3} = (7)^{\log_{7^2}^3} = (7)^{\frac{1}{2} \cdot \log_7^3} = (7)^{\log_7^{\sqrt{3}}}$ usando a propriedade I temos que:
$7^{\log_7^{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$

d) $5^{2-\log_5^3} = (5)^{\log_5^{25} - \log_5^3} = (5)^{\log_5^{\frac{25}{3}}}$ usando a propriedade I temos que:
$5^{\log_5^{\frac{25}{3}}} = \frac{25}{3}$

e) Usando a propriedade III temos que: $\log_{16}^3 = \frac{1}{4} \cdot \log_{16}^3 = \log_2^{3^{\frac{1}{4}}}$

$4^{\log_2^3 + \log_{16}^3} = (2^2)^{\log_2^3 + \log_2^{3^{\frac{1}{4}}}} = 2^{2 \cdot \log_2^{3^{\frac{1}{4}}}} = 2^{\log_2^{3^{\frac{1}{2}}}}$

Usando a propriedade I temos que: $2^{\log_2^{3^{\frac{1}{2}}}} = 3^{\frac{1}{2}} = 9\sqrt{3}$

Questão – 7.15

Solução:

$\log_2^{128} = 7$, pois $2^7 = 128$. Daí temos que $\log_7 \log_2^{128} = \log_7^7 = 1$, pois $7^1 = 7$.
Assim temos que
$\log_{11} \log_7 \log_2^{128} = \log_{11}^1 = 0$, pois $11^0 = 1$

Questão – 7.16

Solução:

a) $\log_3(\log_2(\log_{10}^x)) = 0 \Rightarrow \log_2(\log_{10}^x) = 1 \Rightarrow \log_{10}^x = 2 \Rightarrow x = 100$

b) $\log_{27}(\log_2(\log_2^{x-1})) = \frac{1}{3} \Rightarrow \log_2(\log_2^{x-1}) = 3 \Rightarrow \log_2^{x-1} = 8 \Rightarrow x - 1 = 256 \Rightarrow x = 257$

Questão – 7.17

Solução:

$\log_a^2 = p \Rightarrow \log_a \log_a^2 = \log_a^p$

$$\log_a^2 = p \Rightarrow \frac{1}{\log_a^2} = \frac{1}{p} \Rightarrow \log_a^3 + \frac{1}{\log_a^2} = q + \frac{1}{p} = \frac{pq+1}{p} \Rightarrow \log_a\left(\log_a^3 + \frac{1}{\log_a^2}\right) = \log_a^{\frac{pq+1}{p}}$$

$$\log_a \log_a^2 + \log_a\left(\log_a^3 + \frac{1}{\log_a^2}\right) = \log_a^p + \log_a^{\frac{pq+1}{p}} = \log_a^{pq+1}$$

$$a^{\log_a \log_a^2 + \log_a\left(\log_a^3 + \frac{1}{\log_a^2}\right)} = a^{\log_a^{pq+1}} = pq+1$$

Questão – 7.19

Solução:

a) $2^{3x} + 2^{3x+1} + 2^{3x+2} = 14\sqrt{2} \Rightarrow 2^{3x}(1+2+4) = 14\sqrt{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2^{3x} = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2^{3x} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

b) Faça $5^x = y$ temos que:

$$Y^2 - 20y - 125 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{20+30}{2} = 25 \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow x = 2 \\ y = \dfrac{20-30}{2} = -5 \Rightarrow 5^x = -5 \Rightarrow S = \varnothing \end{cases}$$

c) faça $y = 3^{2\sqrt{x}}$

$$Y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{4+2}{2} = 3 \Rightarrow 3^{2\sqrt{x}} = 3 \Rightarrow x = \dfrac{1}{4} \\ y = \dfrac{4-2}{2} = 1 \Rightarrow 3^{2\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

Questão – 7.20

Solução:

a) $10^{3x-3} = 5 \Rightarrow 3x - 3 = \log_{10}^{5} \Rightarrow 3x - 3 = 0699 \Rightarrow x = 1{,}233$

b) Faça $3^x = y$ daí temos que:

$2y^2 - 11y + 5 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{11+9}{4} = 5 \Rightarrow 2^{3x} = 5 \Rightarrow 3x = \log_2^5 \Rightarrow 3x = 2{,}322 \Rightarrow x = 0{,}774 \\ y = \dfrac{11-9}{4} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2^{3x} = 2^{-1} \Rightarrow x = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

c) Faça $2^x = y$ daí temos que:

$16y^2 - 32y + 15 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{32+8}{32} = \dfrac{5}{4} \Rightarrow 2^x = \dfrac{5}{4} \Rightarrow x = \log_2^5 - \log_2^4 \Rightarrow x = 2{,}322 - 2 \Rightarrow x = 0{,}322 \\ y = \dfrac{32-8}{32} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow 2^x = \dfrac{3}{4} \Rightarrow x = \log_2^3 - \log_2^4 = 1{,}585 - 2 = -0{,}415 \end{cases}$$

Capítulo 8

Capítulo 8

EXERCICOS PROPOSTOS

Questão – 8.12

Solução:

a) $\log_{10}^{3\cdot 5^{n-1}} = \log_{10}^{3} + \log_{10}^{5^{n-1}} = \log_{10}^{3} + (n-1)\log_{10}^{5}$

b) $\log_{10}^{a\sqrt{b\sqrt{c}}} = \log_{10}^{a\cdot b^{\frac{1}{2}}\cdot c^{\frac{1}{4}}} = \log_{10}^{a} + \log_{10}^{b^{\frac{1}{2}}} + \log_{10}^{c^{\frac{1}{4}}} = \log_{10}^{a} + \frac{1}{2}\cdot\log_{10}^{b} + \frac{1}{4}\cdot\log_{10}^{c}$

c) $\log_{10}^{a_1^n\cdot q^{\frac{(n)\cdot(n-1)}{2}}} = \log_{10}^{a_1^n} + \log_{10}^{q^{\frac{(n)\cdot(n-1)}{2}}} = n\cdot\log_{10}^{a_1} + \frac{(n)\cdot(n-1)}{2}\cdot\log_{10}^{q}$

d) $\log_{10}^{\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)\cdot n} = \log_{10}^{\frac{a_1+a_n}{2}} + \log_{10}^{n} = \log_{10}^{a_1+a_n} + \log_{10}^{n} - \log_{10}^{2}$

e) $\log_{10}^{\left(\frac{2^5\sqrt{5}}{\pi\cdot 3^2\sqrt[3]{7}}\right)} = \log 2^5\cdot\sqrt{5} - \log\pi\cdot 3^2\cdot\sqrt[3]{7} = 5\cdot\log 2 + \frac{1}{2}\cdot\log 5 - \log\pi - 2\cdot\log 3 - \frac{1}{3}\log 7$

Questão – 8.13

Solução:

a) $\log E = \log 3 + \log 7 + 2\log b = \log 21 + \log b^2 = \log 21b^2 \Rightarrow E = 21b^2$

b) $\log_2 E = \log_4^a + \log_8^b - 2\cdot\log_2^c \Rightarrow \log_2 E = \log_2^{\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}}{c^2}} \Rightarrow E = \frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}}{c^2}$

c) $\log_3 E = \log_3^9 + \log_3^5 + \log_9^a - \log_{27}^b \Rightarrow \log_3 E = \log_3^{\frac{45}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}}} \Rightarrow E = \frac{45}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}}$

d) $\log E = 3 + \frac{1}{2}\cdot(\log a + \log b) - \frac{3}{4}\cdot\log(a+b) \Rightarrow \log E = \log\frac{1000\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{(a+b)^3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow E = \frac{1000\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{(a+b)^3}}$

Questão – 8.14

Solução:

a) $\log(x-3)+\log(x+2)=\log 42-\log 3 \Rightarrow \log(x-3)\cdot(x+2)=\log 14 \Rightarrow$

$(x-3)\cdot(x+2)=14 \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-4 \end{cases}$

Note que se $x=-4$, o log $x-4$ não existe pois $x-4<0$, logo $x=5$ é a única solução.

b) $2\cdot\log_2^{x+1}=\log_2^{x+2}+1 \Rightarrow \log_2^{(x+1)^2}=\log_2^{x+2}+\log_2^2 \Rightarrow (x+1)^2=2\cdot(x+2) \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+2x+1=2x+4 \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{cases}$

Note que se $x=-\sqrt{3}$, o log $x+1$ não existe pois $1-\sqrt{3}<0$, logo $x=\sqrt{3}$ é a única solução.

c) Correção no enunciado: $\log_9^{x-1}+\log_3^{\sqrt{10x-4}}=\log_3^{x+2}$

$\log_9^{x-1}+\log_3^{\sqrt{10x-4}}=\log_3^{x+2} \Rightarrow \log_3^{\sqrt{x-1}}+\log_3^{\sqrt{10x-4}}=\log_3^{x+2} \Rightarrow \log_3^{\sqrt{(x-1)\cdot(10x-4)}}=\log_3^{x+2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(x-1)\cdot(10x-4)}=x+2 \Rightarrow (x-1)\cdot(10x-4)=(x+2)^2 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

Note que se $x=0$, o log $x-1$ não existe pois $0-1<0$, logo $x=2$ é a única solução.

d) $\log_5^{x^2}+3\cdot\log_{25}^{x^2}+2\cdot\log_{625}^{x^2}=9 \Rightarrow \log_5^{x^2}+\frac{3}{2}\cdot\log_5^{x^2}+\frac{2}{4}\cdot\log_5^{x^2}=9 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_5^{x^2}\cdot\left(1+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)=9 \Rightarrow \log_5^{x^2}=3 \Rightarrow \begin{cases} x=5\sqrt{5} \\ x=-5\sqrt{5} \end{cases}$

Questão – 8.15

Solução:

a) $\begin{cases} \log_2^x + \log_2^y = 1 \\ \log_3^x - 3\log_3^y = -\log_3^{32} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2^{xy} = 1 \\ \log_3^{\frac{x}{y^3}} = \log_3^{\frac{1}{32}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 2 \\ \frac{x}{y^3} = \frac{1}{32} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = 2\sqrt{2}$

b) $\begin{cases} \log^{\sqrt{x}} - \log^{\sqrt{y}} = \log^3 \\ -x^2 + 9y^3 = 90y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log^{\sqrt{\frac{x}{y}}} = \log^3 \\ -x^2 + 9y^3 = 90y \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{y}} = 3 \Rightarrow x = 9y \Rightarrow -81y^2 + 9y^3 = 90y$

$\Rightarrow 9y.(y^2 - 9y - 90) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 10 \\ y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 90 \\ y = -81 \end{cases}$

Como $\sqrt{x} > 0$ temos x = 90 e y = 10 é a única solução

Questão – 8.16

Solução:

a) $\log_{81}^{64} = \log_{3^4}^{2^6} = \frac{6}{4} \cdot \log_3^2 = \frac{3a}{2}$

b) $\log_3^{108} = \log_3^{2^2 \cdot 3^3} = \log_3^{2^2} + \log_3^{3^3} = 2 \cdot \log_3^2 + 3 = 2a + 3$

c) $\log_9^{\frac{64}{27}} = \log_9^{64} - \log_9^{3^3} = \log_{3^2}^{2^6} - \log_{3^2}^{3^3} = 3 \cdot \log_3^2 - \frac{3}{2} = \frac{3(2a-1)}{2}$

Questão – 8.17

Solução:

a) $\log_{10}^{2,5} = 1 \Rightarrow \log_{10}^2 + \log_{10}^5 = 1 \Rightarrow \log_{10}^5 = 1 - \log_{10}^2 = 0,699$

b) $\log_{10}^{2^3 \cdot 3^2} = \log_{10}^{2^3} + \log_{10}^{3^2} = 3 \cdot \log_{10}^2 + 2 \cdot \log_{10}^3 = 0,903 + 0,954 = 1,857$

c) $\log_{10}^{1200} = \log_{10}^{2^2 \cdot 3 \cdot 10^2} = \log_{10}^{2^2} + \log_{10}^{3} + \log_{10}^{10^2} = 2 \cdot \log_{10}^{2} + \log_{10}^{3} + 2 =$
$= 0,602 + 0,477 + 2 = 3,079$

d) $\dfrac{\log\sqrt{240} + \log\sqrt{27}}{\log 15} = \dfrac{\log\sqrt{240 \cdot 27}}{\log 15} = \dfrac{\log\sqrt{2^4 \cdot 3^4 \cdot 5}}{\log 3 \cdot 5} = \dfrac{\log 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^{\frac{1}{2}}}{\log 3 + \log 5} =$

$= \dfrac{2 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3 + \dfrac{1}{2} \cdot \log 5}{\log 3 + \log 5} = \dfrac{0,602 + 0,954 + 0,3495}{0,477 + 0,699} = 1,62$

Questão – 8.18

Solução:

a) $\log_9^{10} = \dfrac{1}{2} \cdot \log_3^{10} = \dfrac{1}{2} \cdot (\log_3^2 + \log_3^5) = \dfrac{1}{2} \cdot (0,63 + 1,46) = 1,045$

b) $\log_3^{2,5} = \log_3^{\frac{5}{2}} = (\log_3^5 + \log_3^2) = 1,46 - 0,63 = 0,83$

c) $\log_3^{\sqrt{450}} = \dfrac{1}{2} \cdot \log_3^{450} = \dfrac{1}{2} \cdot (\log_3^{2 \cdot 5^2 \cdot 3^2}) = \dfrac{1}{2} \cdot (\log_3^2 + \log_3^{5^2} + \log_3^{3^2}) =$

$= \dfrac{0,63 + 2 \cdot (1,46) + 2}{2} = 2,775$

Questão – 8.19

Solução:

Note que $648 = 2^3 \cdot 3^4$ e $432 = 2^4 \cdot 3^3$

$p + q = \log^{648 \cdot 432} = \log^{2^7 \cdot 3^7} = \log^{6^7} \Rightarrow p + q = 7 \cdot \log^6 \Rightarrow \dfrac{p+q}{7} = \log^6$

Questão – 8.20

Solução:

$3 = \log_2^8 = \log_2^{(\sqrt{17}-3)(\sqrt{17}+3)} = \log_2^{(\sqrt{17}+3)} + \log_2^{(\sqrt{17}-3)} \Rightarrow 3 - a = \log_2^{(\sqrt{17}+3)}$

Questão – 8.21

Solução:

$$\log_{10}^{\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}} = \log_{10}^{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \Rightarrow \log_{10}^{a-b} - \log_{10}^{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \log_{10}^{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \Rightarrow m - n = \log_{10}^{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

Questão – 8.22

Solução:

a) $\log_3^x = y \Rightarrow 3^y = x \Rightarrow (3^y)^y = 9 \cdot 3^y \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$

b) $\log_{10}^x = y \Rightarrow (10^y)^y = 10^{4y-3} \Rightarrow y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1000 \\ x = 10 \end{cases}$

c) $\log_{10}^x = y \Rightarrow (y)^y = 10^{2y} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 10^{100} \end{cases}$

Questão – 8.23

Solução:

a) $(10)^{3x} = 9 \Rightarrow 3x = \log_{10}^9 \Rightarrow 3x = 2 \cdot (0,477) \Rightarrow x = 0,318$

b) $(\sqrt{10})^x = 5 \Rightarrow (10)^{\frac{x}{2}} = 5 \Rightarrow \frac{x}{2} = \log_{10}^5 \Rightarrow \frac{x}{2} = 0,699 \Rightarrow x = 1,398$

c) Faça $10^x = y$, assim temos que:

$$2y^2 - 15y + 18 = 0 \begin{cases} y = \frac{15+9}{4} = 6 \\ y = \frac{15-9}{4} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \log_{10}^6 = 0,301 + 0,477 = 0,778 \\ x = \log_{10}^{\frac{3}{2}} = 0,477 - 0,301 = 0,176 \end{cases}$$

d) $(2^{x+1} - 3) \cdot (2^x - 27) \cdot (3 \cdot 2^x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2^{x+1} - 3 = 0 \\ 2^x - 27 = 0 \\ 3 \cdot 2^x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = \frac{3}{2} \\ 2^x = 27 \\ 2^x = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \log_2^3 - \log_2^2 = 0,585 \\ x = 3 \cdot \log_2^3 = 4,755 \\ x = -\log_2^3 = -1,585 \end{cases}$

Questão – 8.25

Solução:

$(x, x.q, x.q^2)$ é uma P.G. sabemos pela questão 8.24 que (log x, log xq, log xq^2) é uma P.A.

Logo temos que $\log_a xq = \log_a x + r \Rightarrow \log_a xq - \log_a x = r$

$\Rightarrow \log_a \frac{xq}{x} = r \Rightarrow \log_a q = r \Rightarrow q = a^r$

Questão – 8.26

Solução:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 13,5 = 4 \cdot (1,5)^{n-1} \Rightarrow (1,5)^{n-1} = 3,375 \Rightarrow n = 4$

Questão – 8.27

Solução:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{1024} = 1024 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 2^{20} = q^{n-1} \Rightarrow 20 = n \cdot (n-1) \Rightarrow n = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{20} = q^4 \Rightarrow q = 32$

Questão – 8.29

Solução:

$s = \log a + \log b$ e $p = \log a \cdot \log b$

$2S = \log ab + \log \frac{a}{b} = (\log a + \log b) + (\log a - \log b) = 2\log a \Rightarrow S = \log a$

$P = \log ab \cdot \log \frac{a}{b} = (\log a + \log b) \cdot (\log a - \log b) = \log^2 a - \log^2 b$

Note que $s - S = \log b$ e $2S - s = \log a - \log b$

Daí temos que $S \cdot (s - S) = \log a \cdot \log b = p$ e $s \cdot (2S - s) =$

$= (\log a + \log b) \cdot (\log a - \log b) = P$

Capítulo 9

Capítulo 9

EXERCICOS PROPOSTOS

Questão – 9.1

Solução:

a) Como log b = 0,2314 > 0 temos que c = 0 e 0, m = 0,2314
b) Como log b = 6,3112 > 0 temos que c = 6 e 0, m = 0,3112
c) Como log b = $\bar{1}$,2310 = – 1 + 0,2310 = – 0, 7290 < 0 temos que c = – 1 e 0, m = 0,2310
d) Como log b = $\bar{7}$,1212 = – 7 + 0,1212 = – 6, 8788 < 0 temos que c = – 7 e 0, m = 0,1212
e) Como log b = – 0,3516 = – 1 + 0,6484 < 0 temos que c = – 1 e 0, m = 0,6484
f) Como log b = – 3,9899 = – 4 + 0,0101 < 0 temos que c = – 4 e 0, m = 0,0101

Questão – 9.2

Solução:

a) $\bar{2}$,23 = – 2 + 0,23 e $\bar{1}$,46 = – 1 + 0,46, logo $\bar{2}$,23 + $\bar{1}$,46 = (– 1 – 2) + (0,23 + 0,46) = – 3 + 0,69 = – 2,31

b) $\bar{3}$,42 = – 3 + 0,42 e $\bar{5}$,68 = – 5 + 0,68, logo $\bar{3}$,42 – $\bar{5}$,68 = (– 3 – (– 5)) + (0,42 – 0,68) = 2 – 0,26 = 1,74

c) $3 \cdot (\bar{4},32) = 3 \cdot (-4 + 0,32) = 3 \cdot (-3,68) = -11,04$

d) $\frac{-4,6756}{\bar{3},6622} = \frac{-4,6756}{-3+0,6622} = \frac{-4,6756}{-2,3378} = 2$

Questão – 9.6

Solução:

a) Como $10^2 < 111 < 10^3$ temos que a característica é c = 2. Na tabua diante do numero 111 (coluna do 11 e linha do 1) lê-se 0453 o que quer dizer que a mantissa é 0,m = 0,0453. Assim, log 111 = 2 + 0,0453 = 2,0453

b) Como $10^1 < 74,9 < 10^2$ temos que a característica é c = 1. Na tabua diante do numero 749 (coluna do 74 e linha do 9) lê-se 8745 o que quer dizer que a mantissa é 0,m = 0,8745. Assim, log 74,9 = 1 + 0,8745 = 1,8745

c) Como $10^0 < 2,35 < 10^1$ temos que a característica é c = 0. Na tabua diante do numero 235 (coluna do 23 e linha do 5) lê-se 3711 o que quer dizer que a mantissa é 0,m = 0,3711. Assim, log 2,35 = 0 + 0,3711 = 0,3711

d) Como $10^{-1} < 0,123 < 10^0$ temos que a característica é c = – 1. Na tabua diante do numero 123 (coluna do 12 e linha do 3) lê-se 0899 o que quer dizer que a mantissa é 0,m = 0,0899. Assim, log 0,123 = – 1 + 0,0899 = – 0,9101

e) Como $10^{-3} < 0,00457 < 10^{-2}$ temos que a característica é c = – 3. Na tabua diante do numero 457 (coluna do 45 e linha do 7) lê-se 6599 o que quer dizer que a mantissa é 0,m = 0,6599. Assim, log 0,00457 = – 3 + 0,6599 = – 2,3401

f) Como $10^{-2} < 0,0821 < 10^{-1}$ temos que a característica é c = – 2. Na tabua diante do numero 821 (coluna do 82 e linha do 1) lê-se 9143 o que quer dizer que a mantissa é 0,m = 0,6599. Assim, log 0,0821 = – 2 + 0,9143 = – 1,0857

Questão – 9.7

Solução:

a) Como $10^5 < 73426 < 10^4$ temos que a caracteristica é c = 4. Na tabua diante do numero 734 lê-se 8657 e do numero 735 lê-se 8663. Assim,

$$\frac{1}{0,26} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = 1,56$$

Portanto a log 73426 = 4 + 0,8657 + 0,000156 = 4,8658

b) Como $10^{-2} < 0,079481 < 10^{-1}$ temos que a característica é c = – 2. Na tabua diante do numero 794 lê-se 8998 e do numero 795 lê-se 9004. Assim,

$$\frac{1}{0,81} = \frac{6}{x} \Rightarrow 4,86$$

Portanto a log 73426 = – 2 + 0,8998 + 0,000486 = -1,0997

Questão – 9.8

Solução:

a) Correção no enunciado log b = 1,1881
Com o auxilio da tabua temos que 1881 corresponde a 152 assim temos que $b = 152 \cdot 10^{1-2} = 15,2$

b) Com o auxilio da tabua temos que 9479 corresponde a 887 assim temos que $b = 887 \cdot 10^{3-2} = 8870$

c) Com o auxilio da tabua temos que 7649 corresponde a 582 assim temos que $b = 582 \cdot 10^{2-2} = 582$

Nota: Claramente o gabarito está errado, pois $10^{-2} < 0,0582 < 10^{-1}$ temos que a característica é c = – 2. Para b = 0,0582 deveríamos ter log b = – 2 + 0,7649 = – 1, 2351.

d) – 3,1979 = – 4 + 0,8021
Com o auxilio da tabua temos que 8021 corresponde a 634 assim temos que $b = 634 \cdot 10^{-4-2} = 0,000634$.

Questão – 9.9

Solução:

a) Na tabua diante do numero 327 lê-se 5145 e do numero 328 lê-se 5159.
Assim, $\frac{1}{x} = \frac{14}{6} \Rightarrow x = 0,4285$
Portanto teremos 327 + 0,4284 = 327,4. Assim temos que $b = 327,4 \cdot 10^{0-2} = 3,274$

b) Na tabua diante do numero 472 lê-se 6739 e do numero 473 lê-se 6749.
Assim, $\frac{1}{x} = \frac{10}{4} \Rightarrow x = 0,4$
Portanto teremos 472 + 0,4 = 472,4. Assim temos que $b = 472,4 \cdot 10^{-2-2} = 0,04724$

Questão – 9.10

Solução:

a) Na tabua diante do numero 546 lê-se 7372. Assim temos que
log 54,6 = 1 + 0,7372 = 1,7372. Portanto

$$\log x = \log \sqrt[6]{54,6} = \frac{1}{6}\cdot \log 54,6 = \frac{1}{6}\cdot 1,7372 = 0,2895$$

Na tabua diante do numero 194 lê-se 2878 e diante do 195 lê-se 2900. Assim temos que

$$\frac{1}{a} = \frac{22}{17} \Rightarrow a = 0,77$$

Daí temos que $x = 194,7\cdot 10^{0-2} = 1,947$

b) $(7,92)^2 \cdot x^3 - \sqrt[5]{64,9} = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{\sqrt[5]{64,9}}{(7,92)^2} \Rightarrow \log x^3 = \log \frac{\sqrt[5]{64,9}}{(7,92)^2} \Rightarrow$

$3.\log x = \log \sqrt[5]{64,9} - \log$

$$(7,92)^2 \Rightarrow x = \frac{\frac{1}{5}\log 64,9 - 2\cdot \log(7,92)^2}{3} = -0,4783$$

Na tabua diante do numero 332 lê-se 5211 e diante do 333 lê-se 5224.Assim temos que Log x = – 1 + 0,5217. Portanto

$$\frac{1}{a} = \frac{13}{6} \Rightarrow a = 0,46$$

Daí temos que $x = 332,4\cdot 10^{-1-2} = 0,3324$

Questão – 9.11

Solução:

a) $\log 2^{105} = 105\cdot\log 2 = 105\cdot 0,301 = 31,605$ portanto 2^{105} tem 32 algarismos

b) $\log 3^{60} = 60\cdot\log 3 = 60\cdot 0,477 = 28,62$ portanto 3^{60} tem 29 algarismos

Questão – 9.12

Solução:

a) $\log 3^{30} = 30\cdot\log 3 = 30\cdot 0,477 = 14,41$ portanto $10^{14} < 3^{30} < 10^{15}$ portanto temos que $10^{-15} < 3^{-30} < 10^{-14}$, logo temos 15 zeros iniciais

b) $\log 2^{44} = 44.\log 2 = 44\cdot 0,301 = 13,244$ portanto $10^{13} < 3^{30} < 10^{14}$ portanto temos que $10^{-14} < 2^{-44} < 10^{-13}$, logo temos 14 zeros iniciais

Capítulo 10

Esse capítulo não contém questões

Capítulo 11

Capítulo 11

EXERCICOS PROPOSTOS

Questão – 11.6

Solução:

a) $\log_3^5 = \frac{\log 5}{\log 3} = \frac{0,699}{0,477} = 1,465$

b) $\log_7^{11} = \frac{\log 11}{\log 7} = \frac{1,0414}{0,8451} = 1,2323$

c) $\log_{42,5}^{0,128} = \frac{\log\frac{128}{1000}}{\log\frac{425}{10}} = \frac{\log 128 - \log 1000}{\log 425 - \log 10} = \frac{2,1072-3}{2,6285-1} = -\frac{0,8928}{1,6285} = -0,5483$

Questão – 11.7

Solução:

a) $3^x = 5 \Rightarrow \log_3^5 = x = 1,465$

b) $2 \cdot 5^x - 3 = 0 \Rightarrow 5^x = \frac{3}{2} \Rightarrow \log_5^{\frac{3}{2}} = x \Rightarrow \log_5^3 - \log_5^2 = \frac{\log 3}{\log 5} - \frac{\log 2}{\log 5} =$

$= \frac{0,477 - 0,301}{0,699} = 0,2519$

c) $2^{x+1} + 2^{x+3} = 18 \Rightarrow 2^x = \frac{9}{5} \Rightarrow \log_2^{\frac{9}{5}} = x \Rightarrow x = \frac{\ln 9 - \ln 5}{\ln 2} =$

$= \frac{2,197224577 - 1,609437912}{0,69314718} = 0,848$

d) Faça $5^x = y$ daí temos que:

$$y^2 - 12y + 20 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 10 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \log_5^{10} \Rightarrow x = \frac{1}{\log 5} = 1,4307 \\ x = \log_5^2 \Rightarrow x = \frac{\log 2}{\log 5} = 0,4307 \end{cases}$$

e) Faça $7^x = y$ daí temos que:

$$6y^2 - 5y + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \log_7^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{\log_7^1 - \log_7^2}{\log_7^7} = 0 - \frac{\log 2}{\log 7} = 0 - \frac{0,301}{0,8451} = -0,3562 \\ x = \log_7^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \frac{\log_7^1 - \log_7^3}{\log_7^7} = 0 - \frac{\log 3}{\log 7} = 0 - \frac{0,477}{0,8451} = -0,5646 \end{cases}$$

Questão – 11.8

Solução:

a) $\ln \pi = \dfrac{\log \pi}{\log e} = \dfrac{\frac{49}{100}}{\frac{43}{100}} = \dfrac{49}{100} \cdot \dfrac{100}{43} = \dfrac{49}{43}$

b) $\ln 7 = \dfrac{\log 7}{\log e} = \dfrac{\frac{21}{25}}{\frac{43}{100}} = \dfrac{21}{25} \cdot \dfrac{100}{43} = \dfrac{84}{43}$

c) $\log_7^e = \dfrac{\log e}{\log 7} = \dfrac{\frac{43}{100}}{\frac{21}{25}} = \dfrac{43}{100} \cdot \dfrac{25}{21} = \dfrac{43}{84}$

d) $\log_\pi^7 = \dfrac{\log 7}{\log \pi} = \dfrac{\frac{21}{25}}{\frac{49}{100}} = \dfrac{21}{25} \cdot \dfrac{100}{49} = \dfrac{12}{7}$

Questão – 11.9

Solução:

a) $\log_3^2 = \dfrac{1}{\log_2^3} = \dfrac{1}{\frac{8}{5}} = 1 \cdot \dfrac{5}{8} = \dfrac{5}{8}$

b) $\log_3^6 = \log_3^2 + \log_3^3 = \dfrac{5}{8} + 1 = \dfrac{13}{8}$

c) $\log_{\frac{3}{2}}^{18} = \dfrac{\log 18}{\log 3 - \log 2} = \dfrac{2 \cdot (0,477) + 0,301}{0,477 - 0,301} = \dfrac{1,255}{0,176} = 7,13$

Questão – 11.10

Solução:

a) $\log 6 = \dfrac{\log_2^6}{\log_2^{10}} = \dfrac{\log_2^2 + \log_2^3}{\log_2^2 + \log_2^5} = \dfrac{1+a}{1+\dfrac{1}{\log_5^2}} = \dfrac{1+a}{1+\dfrac{1}{b}} = \dfrac{b\cdot(a+1)}{b+1}$

b) $\log_{25}^{120} = \dfrac{\log_2^{120}}{\log_2^{25}} = \dfrac{3\cdot\log_2^2 + \log_2^3 + \log_2^5}{\log_2^5 + \log_2^5} = \dfrac{3+a+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{2}{b}} = \dfrac{3b+ab+1}{2}$

c) $\log_{40}^{675} = \dfrac{\log_2^{675}}{\log_2^{40}} = \dfrac{2\cdot\log_2^5 + 3\cdot\log_2^3}{3\cdot\log_2^2 + \log_2^5} = \dfrac{\dfrac{2}{b}+3a}{3+\dfrac{1}{b}} = \dfrac{3ab+2}{3b+1}$

Questão – 11.11

Solução:

a) $\log_{11}^4 = \dfrac{\log_3^4}{\log_3^{11}} = \dfrac{2\cdot\log_3^2}{\log_3^{11}} = \dfrac{2p}{\dfrac{1}{q}} = 2pq$

b) $\log_{44}^{33} = \dfrac{\log_3^{33}}{\log_3^{44}} = \dfrac{\log_3^3 + \log_3^{11}}{\log_3^4 + \log_3^{11}} = \dfrac{1+\dfrac{1}{q}}{2p+\dfrac{1}{q}} = \dfrac{q+1}{q}\cdot\dfrac{q}{2pq+1} = \dfrac{q+1}{2pq+1}$

c) $\log_{66}^{1452} = \dfrac{\log_3^{1452}}{\log_3^{66}} = \dfrac{\log_3^4 + 2\cdot\log_3^{11} + \log_3^3}{\log_3^2 + \log_3^3 + \log_3^{11}} = \dfrac{2p+\dfrac{2}{q}+1}{p+1+\dfrac{1}{q}} = \dfrac{2pq+q+2}{pq+q+1}$

Questão – 11.12

Solução:

a) $y = \log_7^5 \cdot \log_{12}^7 \cdot \log_{125}^{12} = \frac{\log 5}{\log 7} \cdot \frac{\log 7}{\log 12} \cdot \frac{\log 12}{\log 125} = \frac{\log 5}{\log 125} = \log_{125}^5 = \frac{1}{3}$

b) $y = \log_{b^4}^{a^3} \cdot \log_{a^3}^{b^2} \cdot \log_{b^2}^{a} \cdot \log_{a}^{b} = \frac{3 \cdot \log a}{4 \cdot \log b} \cdot \frac{2 \cdot \log b}{3 \cdot \log a} \cdot \frac{\log a}{2 \cdot \log b} \cdot \frac{\log b}{\log a} = \frac{1}{4}$

Questão – 11.15

Solução:

$\log_a^m = 2 \Rightarrow \log_m^a = \frac{1}{2}$

$\log_b^m = 3 \Rightarrow \log_m^b = \frac{1}{3}$

$\log_c^m = 5 \Rightarrow \log_m^c = \frac{1}{5}$

$\log_m^{abc} = \log_m^a + \log_m^b + \log_m^c = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{15+10+6}{30} = \frac{31}{30} \Rightarrow \log_{abc}^m = \frac{1}{\log_m^{abc}} = \frac{30}{31}$

Questão – 11.16

Solução:

a) Faça $\log_3^x = y$ daí temos que:

$$y + \frac{6}{y} = 5 \Rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 27 \end{cases}$$

b) Faça $\log_a^x = y$ daí temos que:

$$y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2y^2 - 5y + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a^2 \\ y = \sqrt{a} \end{cases}$$

c) $\log_a^{ax} + \log_x^{ax} = 4 \Rightarrow \log_a^a + \log_a^x + \log_x^a + \log_x^x = 4 \Rightarrow \log_a^x + \log_x^a = 2$

Faça $\log_a^x = y$ daí temos que:

$$y + \frac{1}{y} = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = a$$

Questão – 11.17

Solução:

$$\log_2^x + \log_3^x = \log 36 \Rightarrow \frac{1}{\log_x^2} + \frac{1}{\log_x^3} = \log 36 \Rightarrow \frac{\log_x^2 + \log_x^3}{\log_x^2 \cdot \log_x^3} = \log 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log_x^6}{\log_x^2 \cdot \log_x^3} = \log 36 \Rightarrow \frac{\frac{\log 6}{\log x}}{\frac{\log 2}{\log x} \cdot \frac{\log 3}{\log x}} = \log 36 \Rightarrow \frac{\log 6 \cdot \log x}{\log 2 \cdot \log 3} = \log 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log x = \frac{2 \cdot (\log 6) \cdot (\log 2 \cdot \log 3)}{\log 6} = 0,2872 \Rightarrow x = 10^{0,2872}$$

Questão – 11.18

Solução:

$$\log_7^x - \log_5^{x^2} = 3 \cdot \log_a^{9,8} \Rightarrow \frac{\ln x}{\ln 7} - \frac{\ln x^2}{\ln 5} = 3 \cdot \frac{\ln \frac{7^2}{5}}{\ln e} \Rightarrow \frac{\ln 5 \ln x - 2 \cdot \ln 7 \cdot \ln x}{\ln 7 \cdot \ln 5} = 3 \cdot (2 \cdot \ln 7 - \ln 5)$$

$$\Rightarrow \ln x = \frac{3 \cdot (2 \cdot \ln 7 - \ln 5) \cdot \ln 7 \cdot \ln 5}{\ln 5 - 2 \ln 7} \Rightarrow \ln x = (-3) \cdot (3,1318) = -9,3954 \Rightarrow x = \frac{1}{e^{9,3954}}$$

Problemas suplementares

Questão – III.1

Solução:

$$\log_{\frac{1}{2}}^{32} + \log_{10}^{0,001} - \log_{0,1}^{10\sqrt{10}} = -5 + (-3) - \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{13}{2}$$

Questão – III.2

Solução:

$$\log_3^{\log_5^p} = 0 \Rightarrow \log_5^p = 1 \Rightarrow p = 5$$

$$\log_5^{\log_3^q} = 0 \Rightarrow \log_3^q = 1 \Rightarrow q = 3 \Rightarrow p + q = 8$$

Questão – III.3

Solução:

$$\log_a^x = 4 \Rightarrow x = a^4$$

$$\log_{\frac{a}{3}}^x = 8 \Rightarrow x = \left(\frac{a}{3}\right)^8 \Rightarrow a^4 = \frac{a^8}{3^8} \Rightarrow a = 9 \Rightarrow x = 9^4 = 6561$$

Questão – III.4

Solução:

$$\log_{0,04}^{125} = x \Rightarrow \left(\frac{1}{25}\right)^x = 5^3 \Rightarrow 5^{-2x} = 5^3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

Questão – III.5

Solução:

$$\log_{25}^{\log_3^x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_3^x = 5 \Rightarrow x = 3^5 = 243$$

Questão – III.6

Solução:

$$2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \ldots 2^{2n-1} = k \Rightarrow 2^{\frac{(1+2n-1)n}{2}} = k \Rightarrow 2^{n^2} = k \Rightarrow n^2 = \log_2^k \Rightarrow n = \sqrt{\log_2^k}$$

Questão – III.7

Solução:

$$\begin{cases} 2^x = \dfrac{1}{2^{y+4}} \\ \log_2^{2x+y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{x+y+4} = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 4 = 0 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 6, y = -10$$

Questão – III.8

Solução:

$$\log_4^{\frac{1}{\log_x^4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\log_x^4} = 2 \Rightarrow \log_4^x = 2 \Rightarrow x = 16$$

Questão – III.9

Solução:

$$\log_3^2 + \log_3^{x+1} = 1 \Rightarrow \log_3^{2x+2} = 1 \Rightarrow 2x + 2 = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Questão – III.10

Solução:

$\log_a^b = 10 \Rightarrow b = a^{10}$

$\log_a^c = 20 \Rightarrow c = a^{20}$

$\log_a^{\sqrt{bc}} + \log_a^{\sqrt{b.c}} = 15 + 15 = 30$

Nota: NOTE QUE NOSSO GABARITO DIVERGE DO GABARITO DO LIVRO

Acredito que o enunciado correto seja: ....calcule o valor de: $\log_a^{\sqrt{bc}} + \log_a^{b\sqrt{c}}$

$\log_a^b = 10 \Rightarrow b = a^{10}$

$\log_a^c = 20 \Rightarrow c = a^{20}$

$\log_a^{\sqrt{bc}} + \log_a^{b\sqrt{c}} = 15 + 25 = 40$

Questão – III.11

Solução:

$$\log_8^{x^{10}} - 3 = 3 \cdot (\log_8^x)^2 \Rightarrow 3 \cdot (\log_8^x)^2 - 10 \cdot \log_8^x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \log_8^x = 3 \\ \log_8^x = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 512 \\ x = 2 \end{cases}$$

Questão – III.12

Solução:

$\log 5 = 1 - \log 2 = 1 - 0{,}30103 = 0{,}69897$

$\log 7{,}2 = \log \frac{2^2 \cdot 3^2}{5} = 2.\log 2 + 2\log 3 - \log 5 = 2 \cdot (0{,}30103) + 2 \cdot (0{,}47712) - 0{,}69897 =$

$= 0{,}85733$

Questão – III.13

Solução:

$$\log_a^x = \frac{5}{2} \cdot (\log x) \Rightarrow \frac{\log x}{\log a} = \frac{5}{2} \cdot \log x \Rightarrow \log a = \frac{2}{5} \Rightarrow a = 10^{\frac{2}{5}}$$

Nota: NOTE QUE NOSSO GABARITO DIVERGE DO GABARITO DO LIVRO

$$a = 10^{\frac{2}{5}} \Rightarrow \log^x_{10^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{\frac{2}{5}} \cdot (\log x) = \frac{5}{2}\log x$$

$$a = 10^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \log^x_{10^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} \cdot (\log x) = \frac{3}{2}\log x$$

Isso mostra que nosso gabarito está correto e o do livro está errado

Questão – III.14

Solução:

$$\begin{cases} 8^x = 2^{y+1} \\ \log_3^x = 1 + \log_3^y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{3x} = 2^{y+1} \\ \log_3^x = \log_3^{3y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = y + 1 \\ x = 3y \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{8} \Rightarrow y = \frac{1}{8}$$

Questão – III.15

Solução:

$$\log\sqrt{x} + \log^x_{100} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\log x = 2 \Rightarrow \log x = 2 \Rightarrow x = 10^2 = 100$$

Questão – III.16

Solução:

$$\log_a^{x^m} + \log_a^{x^n} = p \Rightarrow m \cdot \log_a^x + n \cdot \log_a^x = p \Rightarrow \log_a^x = \frac{p}{m+n} \Rightarrow x = a^{\frac{p}{m+n}}$$

Questão – III.17

Solução:

$$\sum_{n=0}^{3} (-1)^n \cdot (n-1) \cdot \log \frac{n+1}{x} = -\log \frac{1}{x} + \log \frac{3}{x} - 2 \cdot \log \frac{4}{x} = \log \frac{3x}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log x + \log 3 - \log x - 2 \cdot (\log 4 - \log x) = \log 3x - \log 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log 3 - 2 \cdot \log 4 + 2 \log x = \log 3 + \log x - \log 4 \Rightarrow \log x = \log 4 \Rightarrow x = 4$$

Questão – III.18

Solução:

$$\log \frac{1}{y} = -\log y = -(-1 + 0{,}841116) = 0{,}158884$$

Questão – III.19

Solução:

$$\frac{\log a}{\log b} = \frac{-2 + 0{,}12}{-3 + 0{,}18} = \frac{-1{,}88}{-2{,}82} = 0{,}67$$

Questão – III.20

Solução:

$$A = -2 + 0{,}4112 \Rightarrow 3A + 2 = 3 \cdot (-2 + 0{,}4112) + 2 = -6 + 1{,}2336 + 2 = -2{,}7664$$

Questão – III.21

Solução:

$$\frac{x}{y} = \frac{\log_a^{25}}{\log_a^5} = \frac{2 \cdot \log_a^5}{\log_a^5} = 2$$

Questão – III.22

Solução:

$$\ln 71{,}2 = \frac{\log 71{,}2}{\log e} = \frac{1{,}85}{\frac{1}{\ln 10}} = 1{,}85 \cdot \ln 10 = 1{,}85 \cdot 2{,}3 = 4{,}255$$

Questão – III.23

Solução:

$$\log_{16}^{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 16^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = 2^{\frac{8}{3}}$$

$$\log_{\frac{1}{4}}^{x} = \log_{2^{-2}}^{2^{\frac{8}{3}}} = \frac{1}{-2} \cdot \frac{8}{3} = -\frac{4}{3}$$

Questão – III.24

Solução:

$$8^x = 1{,}6 \Rightarrow x = \log_8^{\frac{8}{5}} = \log_8^8 - \log_8^5 = 1 - \frac{1}{1{,}292} = 0{,}226$$

Questão – III.25

Solução:

$$\log_4^{x+2} \cdot \log_x^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \log_2^{x+2} \cdot \frac{1}{\log_2^x} = 1 \Rightarrow \frac{\log_2^{x+2}}{\log_2^x} = 2 \Rightarrow \log_x^{x-2} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

Questão – III.26

Solução:

$$\log_b^a \cdot \log_a^b = 1 \Rightarrow (7 - m) \cdot \left(\frac{11}{2} - m\right) = 1 \Rightarrow 2m^2 - 25m + 75 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = \frac{15}{2} \end{cases}$$

Questão – III.28

Solução:

$\log_y^x = 3 \Rightarrow y^3 = x$

$$(1,y,x)P.A \Rightarrow 2y = x+1 \Rightarrow y^3 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow (y-1)\cdot(y^2+y-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Questão – III.29

Solução:

$y = 2^x \Rightarrow x = \log_2^y$

$\log_2^3 = k \Rightarrow 2^k = 3$

$$x = \frac{\log_3^{\log_2^3}}{\log_3^2} \Rightarrow \log_2^y = \frac{\log_3^k}{\frac{1}{k}} \Rightarrow \log_2^y = k\cdot\log_3^k \Rightarrow \log_2^y = k\cdot\frac{\log_2^k}{\log_2^3} \Rightarrow \log_2^y = k\cdot\frac{\log_2^k}{k}$$

$$\Rightarrow \log_2^y = \log_2^k \Rightarrow y = k \Rightarrow y = \log_2^3$$

Questão – III.32

Solução:

$x = \log_c^{ab} \Rightarrow x+1 = \log_c^{ab}+1 \Rightarrow x+1 = \log_c^{ab}+\log_c^c \Rightarrow x+1 = \log_c^{abc}$

$y = \log_b^{ac} \Rightarrow y+1 = \log_b^{ac}+1 \Rightarrow y+1 = \log_b^{ac}+\log_b^b \Rightarrow y+1 = \log_b^{abc}$

$z = \log_a^{bc} \Rightarrow z+1 = \log_a^{bc}+1 \Rightarrow z+1 = \log_a^{bc}+\log_a^a \Rightarrow z+1 = \log_a^{abc}$

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1} = \frac{1}{\log_c^{abc}}+\frac{1}{\log_b^{abc}}+\frac{1}{\log_a^{abc}} = \log_{abc}^c+\log_{abc}^b+\log_{abc}^a = \log_{abc}^{abc} = 1$$

Questão – III.33

Solução:

$\log_{ab}^{a} = n \Rightarrow (ab)^n = a \Rightarrow a^n \cdot b^n = a \Rightarrow a^{3n} \cdot b^{3n} = a^3 \Rightarrow a^{3n-3} \cdot b^{3n} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^{3n-3} \cdot b^{3n-3} \cdot b^3 = 1 \Rightarrow (ab)^{3n-3} = \dfrac{1}{b^3} = b^{-3}$

$\log_{ab}^{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}} = x \Rightarrow (ab)^x = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}} \Rightarrow (ab)^x = a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow (ab)^{6x} = a^2 \cdot b^{-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow (ab)^{6x} = (ab)^{2n} \cdot (ab)^{3n-3}$

$\Rightarrow (ab)^{6x} = (ab)^{5n-3} \Rightarrow 6x = 5n - 3 \Rightarrow x = \dfrac{5n-3}{6}$

Questão – III.34

Solução:

$c = a_1^{10}(q)^{\frac{9 \cdot 10}{2}} = a^{10}q^{45}$

$\log_c^b = \dfrac{\log_a^b}{\log_a^c} = \dfrac{A}{\log_a^{a^{10}q^{45}}} = \dfrac{A}{\log_a^{a^{10}} + \log_a^{q^{45}}} = \dfrac{A}{10 \cdot \log_a^a + 45 \cdot \log_a^q} = \dfrac{A}{10 + 45 \cdot \log_a^q} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{A}{10 + 45 \cdot \dfrac{\log_b^q}{\log_b^a}} = \dfrac{A}{10 + 45 \cdot \dfrac{1}{\frac{B}{A}}} = \dfrac{A}{10 + 45 \cdot \dfrac{A}{B}} = \dfrac{AB}{10B + 45A}$

Questão – III.36

Solução:

a) $x = \sqrt[18]{28,3} \Rightarrow x = (28,3)^{\frac{1}{18}} \Rightarrow \log x = \dfrac{1}{18} \cdot \log 28,3 \Rightarrow \log x = 0,080655555 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 10^{0,080655555} = 1,204$

b) $x = (12,7)^{1,4} \Rightarrow \log x = 1,4 \cdot \log 12,7 \Rightarrow \log x = 1,54532 \Rightarrow x = 10^{1,54532} = 35,1$

c) $A = (39,6)^{\frac{1}{5}} \Rightarrow \log A = \frac{1}{5} \cdot \log 39,6 \Rightarrow \log A = \frac{1}{5} \cdot 1,5977 \Rightarrow A = 10^{0,31954} = 2,088$

$B = (78,2)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \log B = \frac{1}{3} \cdot \log 78,2 \Rightarrow \log B = \frac{1}{3} \cdot 1,8932 \Rightarrow x = 10^{0,631} = 4,276$

$x = \sqrt[5]{39,6} + \sqrt[3]{78,2} = 2,088 + 4,276 = 6,364$

Questão – III.38

Solução:

$$\log_x^2 \cdot \log_{2x}^2 = \log_{4x}^2 \Rightarrow \frac{1}{\log_2^x} \cdot \frac{1}{\log_2^{2x}} = \frac{1}{\log_2^{4x}} \Rightarrow \log_2^x \cdot \log_2^{2x} = \log_2^{4x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2^x \cdot (\log_2^2 + \log_2^x) = \log_2^4 + \log_2^x \Rightarrow \log_2^x + (\log_2^x)^2 = 2 + \log_2^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_2^x)^2 = 2 \Rightarrow \log_2^x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = 2^{\pm\sqrt{2}}$$

Questão – III.39

Solução:

$$\log_3^x = y \Rightarrow \begin{cases} 3^y = x \\ \log_x^3 = \frac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow 3^{\frac{1}{y}} \cdot (3^y)^y = 3^2 \Rightarrow \frac{1}{y} + y^2 = 2 \Rightarrow y^3 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$y^3 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow (y-1) \cdot (y^2 + y - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \\ y = 3^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$$

Capítulo 12

Capítulo 12

EXERCICOS PROPOSTOS

Questão – 12.8

Solução:

a) crescente, pois $\frac{5}{3} > 1$

b) crescente, pois $\frac{2}{\sqrt{2}} > 1$

c) decrescente, pois $0 < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} < 1$

d) crescente, pois $\log_3^{\sqrt{13}} > 1$

Questão – 12.9

Solução:

a) $3^{3x+2} < 3^{2x+3} \Rightarrow 3x+2 < 2x+3 \Rightarrow x < 1$

b) $(0,3)^{x-1} < (0,3)^{2x} \Rightarrow x-1 > 2x \Rightarrow x < -1$

c) $\left(\frac{1}{8}\right)^x > \sqrt[3]{4} \Rightarrow 2^{-3x} > 2^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x < -\frac{2}{9}$

d) $\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2} \leq \left(\frac{49}{25}\right)^{6-4x} \Rightarrow \left(\frac{5}{7}\right)^{x^2} \leq \left(\frac{5}{7}\right)^{8x-12} \Rightarrow x^2 - 8x + 12 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 6 \end{cases}$

e) $(2)^{\frac{x+1}{x-1}} \geq \sqrt{2} \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x+3}{2(x-1)} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x > 1 \end{cases}$

Questão – 12.10

Solução:

a) $2^x \geq 5 \Rightarrow x \geq \log_2^5 \Rightarrow x \geq \frac{\log 5}{\log 2} \Rightarrow x \geq 2,322$

b) $27 < 9^x < 41 \Rightarrow 3^3 < 3^{2x} < 41 \Rightarrow \frac{3}{2} < x < \frac{\log_3^{41}}{2} \Rightarrow 1,5 < x < 1,6902$

c) $(0{,}13)^2 < 2^x < 130^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (0{,}13)^2 < 2^x < 130^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (13)^2 \cdot 10^{-4} < 2^x < 13^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2^{(13)^2 10^{-4}} < x < \log_2^{13^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \left(\frac{2 \cdot \log 13 - 4 \cdot \log 10}{\log 2}\right) < x < \frac{1}{2} \cdot \frac{\log 130}{\log 2} \Rightarrow$

$\Rightarrow -5{,}88 < x < 3{,}511$

Questão – 12.11

Solução:

a) Faça 2^x = y e daí temos que:

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y \leq 1 \\ y \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

b) Faça 5^x = y e daí temos que:

$$-5y^2 - 26y + 5 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{5} \leq y \leq 5 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

c) Faça 3^{-x} = y e daí temos que:

$$y^2 - 8y + 15 > 0 \Rightarrow \begin{cases} y < 3 \\ y > -\log_3^5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > -1{,}465 \end{cases}$$

Questão – 12.12

Solução:

a) $(2x-3)^{10} > (2x-3)^6 \Rightarrow (2x-3)^4 > 1 \Rightarrow 2x - 3 > 1 \Rightarrow x > 2$

b) $(x^2-8)^{13} \geq (x^2-8)^{17} \Rightarrow 1 \geq (x^2-8)^4 \Rightarrow -1 \geq x^2 - 8 \geq 1 \Rightarrow -3 \geq x \geq 3$

$x^2 - 8 > 0 \Rightarrow x > 2\sqrt{2}$ ou $x < -2\sqrt{2}$

Portanto temos que: $-3 \geq x \geq -2\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{2} \geq x \geq 3$

Questão – 12.13

Solução:

a) correção no enunciado: $a^{x^2} < a^9$

Se a > 1

$a^{x^2} < a^9 \Rightarrow x^2 < 9 \Rightarrow -3 < x < 3$

Se $0 < a < 1$

$a^{x^2} < a^9 \Rightarrow x^2 > 9 \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -3 \end{cases}$

b) Faça $a^x = y$ daí temos que:

$3y^2 - 10y + 3 \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq y \leq 3$

Se $a > 1$ então $\frac{1}{3} \leq a^x \leq 3 \Rightarrow -\log_a^3 \leq x \leq \log_a^3$

Se $0 < x < 1$ então temos que $\frac{1}{3} \leq a^x \leq 3 \Rightarrow \log_a^3 \leq x \leq -\log_a^3$

Questão – 12.14

Solução:

Se $x > 1$ temos que $x^{x^2} > x^{5x} \Rightarrow x^2 > 5x \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 5 \end{cases} \Rightarrow x > 5$

Se $0 < x < 1$ temos que $x^{x^2} > x^{5x} \Rightarrow x^2 < 5x \Rightarrow 0 < x < 5 \Rightarrow 0 < x < 1$
Logo temos que $0 < x < 1$ ou $x > 5$

Questão – 12.15

Solução:

a) Note $2^x > 0$ logo temos que se $\alpha \leq 0$ qualquer numero real é solução e se $\alpha > 0$ então temos que $2^x > \alpha \Rightarrow x > \log_2^\alpha$

b) Note $2^x > 0$ logo temos que se $\alpha \leq 0$ não temos solução e se $\alpha > 0$ então temos que $2^x < \alpha \Rightarrow x < \log_2^\alpha$

Questão – 12.19

Solução:

a) $3x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$

b) $x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$

c) $\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > -3 \end{cases} \Rightarrow x > -2$

d) $(x+2)\cdot(x+3) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x > -2 \end{cases}$, logo $x > -3$ ou $x < -2$

e) $\begin{cases} x+2 > 0 \\ 3-x > 0 \\ 3-x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x < 3 \\ x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow -2 < x < 3 \text{ e } x \neq 2.$

f) $5 - 25^x > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$

Questão – 12.20

Solução:

a) $\begin{cases} 2x+5 > 0 \\ 2x+5 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{5}{2} \\ x \neq -2 \end{cases} \Rightarrow x > -\frac{5}{2} \text{ e } x \neq -2$

b) $\begin{cases} x^2-1 > 0 \\ x^2-1 \neq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \\ x > 0 \\ x \neq \sqrt{2} \\ x \neq -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow x > 1 \text{ e } x \neq \sqrt{2}$

c) $\begin{cases} 3x-4 > 0 \\ 3x-4 \neq 1 \\ x^2-9 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{4}{3} \\ x \neq \frac{5}{3} \\ x > 3 \\ x < -3 \end{cases} \Rightarrow x > 3$

d) $\begin{cases} 12-x^2 > 0 \\ 12-x^2 \neq 1 \\ 2x-6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\sqrt{3} < x < 2\sqrt{3} \\ x \neq \pm\sqrt{11} \\ x > 3 \end{cases} \Rightarrow 3 < x < 2\sqrt{3} \text{ e } x \neq \sqrt{11}$

e) $\begin{cases} x^2-2 > 0 \\ x^2-2 \neq 1 \\ 3-x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \sqrt{2} \\ x < -\sqrt{2} \\ x \neq \pm\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} < x < -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} < x < \sqrt{3} \end{cases}$

Questão – 12.30

Solução:

a) V, pois como $2 > 1$ temos que $\log_2^{27} > \log_2^{19}$

b) F, pois como $\frac{1}{2} < 1$ temos que $\log_{\frac{1}{2}}^{27} > \log_{\frac{1}{2}}^{19}$

c) V, pois como $0,7 < 1$ e $\pi < \sqrt{10}$ temos que $\log_{0,7}^{\pi} > \log_{0,7}^{\sqrt{10}}$

d) V, pois como $5 > 1$ temos que $\log_5^x > \log_5^7 \Leftrightarrow x > 7$

e) V, pois como $\frac{1}{2} < 1$ temos que $\log_{\frac{1}{2}}^x > \log_{\frac{1}{2}}^7 \Leftrightarrow x < 7$

f) CORREÇÃO NO ENUNCIADO: $\log_{\frac{1}{2}}^x > \log_{\frac{1}{2}}^7 \Leftrightarrow x > 7$

F, pois como $\frac{1}{2} < 1$ temos que $\log_{\frac{1}{2}}^x > \log_{\frac{1}{2}}^7 \Leftrightarrow x < 7$

Questão – 12.31

Solução:

a) CORREÇÃO NO ENUNCIADO: $\log_2^{x-3} > \log_2^7 \Leftrightarrow x < 7$

$$\begin{cases} x-3 > 7 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 10 \\ x > 3 \end{cases} \Rightarrow x > 10$$

b) $$\begin{cases} 2x-1 \leq x+3 \\ 2x-1 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x > \frac{1}{2} \\ x > -3 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} < x \leq 4$$

c) $$\begin{cases} x^2-4x-45 < 0 \\ x^2-4x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 < x < 9 \\ x < 0 \\ x > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 < x < 0 \\ 4 < x < 9 \end{cases}$$

d) $\begin{cases} x^2 - 13 > 0 \\ x^2 < 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{13} \\ x > \sqrt{13} \\ -4 < x < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 < x < -\sqrt{13} \\ \sqrt{13} < x < 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 + 2x + 1 < 9 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 < x < 2 \\ x \neq -1 \end{cases}$

Questão – 12.32

Solução:

a) $x - 3 \geq 1 \Rightarrow x \geq 4$

b) $\begin{cases} x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}^{x} + 3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}^{x} \geq -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 8 \end{cases} \Rightarrow 0 < x \leq 8$

c) $\begin{cases} x^2 - 3 > 0 \\ x^2 - 3 > 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2 - x > 0 \\ 0 < \log_2^{2-x} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 > x \\ 1 < 2 - x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 > x \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 1$

e) $\begin{cases} x^2 > 0 \\ x^2 > 1 \\ \log_4^{x^2} > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}^{\log_4^{x^2}} > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}^{\log_4^{x^2}} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \\ x^2 < 4 \\ x^2 < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \\ -2 < x < 2 \\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 < x < -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} < x < 2 \end{cases}$

Questão – 12.33

Solução:

a) $\log(x+2) \Rightarrow x+2>0 \Rightarrow x>-2$

$\log(x+3) \Rightarrow x+3>0 \Rightarrow x>-3$

$\log(x+3)+\log(x+2)>\log 12 \Rightarrow (x+2)\cdot(x+3)>12 \Rightarrow x^2+5x-6>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<-6 \end{cases} \Rightarrow x>1$

b) $\log_{\frac{1}{2}}^{x+2} \Rightarrow x+2>0 \Rightarrow x>-2$

$\log_{\frac{1}{2}}^{x+3} \Rightarrow x+3>0 \Rightarrow x>-3$

$\log_{\frac{1}{2}}^{x+2}-\log_{\frac{1}{2}}^{x+3} \leq -1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{x+2}{x+3}} \leq -1 \Rightarrow \frac{x+2}{x+3} \geq 2 \Rightarrow \frac{-x-4}{x+3} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x<-4 \\ x>-3 \end{cases} \Rightarrow S=\varnothing$

c) $\log_5^x \cdot \log_5^x - 18>0 \Rightarrow 2\cdot(\log_5^x)^2>18 \Rightarrow (\log_5^x)^2>9 \Rightarrow \begin{cases} \log_5^x>3 \\ \log_5^x<-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>125 \\ 0<x<\frac{1}{125} \end{cases}$

d) $(2\cdot\log_2^x)^2-4\cdot\log_2^x-24\leq 0 \Rightarrow 4\cdot(\log_2^x)^2-4\cdot\log_2^x-24\leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2\leq\log_2^x\leq 3 \Rightarrow \frac{1}{4}\leq x\leq 8$

Questão – 12.34

Solução:

a) $\log_{\frac{1}{3}}^{x} - 3 \cdot \log_{x}^{3} + 4 > 0 \Rightarrow -\log_{3}^{x} - 3 \cdot \log_{x}^{3} + 4 > 0 \Rightarrow -\log_{3}^{x} - 3 \cdot \frac{1}{\log_{3}^{x}} + 4 > 0 \Rightarrow \frac{(\log_{3}^{x})^2 - 4\log_{3}^{x} + 3}{\log_{3}^{x}} < 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 < \log_3^x < 3 \\ e \\ \log_3^x > 0 \\ ou \\ \log_3^x > 3 \\ e \\ \log_3^x < 0 \\ ou \\ \log_3^x < 1 \\ e \\ \log_3^x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 < x < 27 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

b) Faça $y = \log_2^{x-1}$ daí temos que

$$\begin{cases} x-1>0 \\ \dfrac{y^2-3y-10}{y} \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ y<-2 \\ 0<y<5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x-1 \le \dfrac{1}{4} \\ 1<x-1 \le 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1<x \le \dfrac{5}{4} \\ 2<x \le 33 \end{cases}$$

Questão – 12.35

Solução:

a) $\log_{x^2-8}^{11} < \log_{x^2-8}^{21} \Leftrightarrow x^2 - 8 > 1 \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -3 \end{cases}$

b) $\log_{x^2-2}^{23} \le \log_{x^2-2}^{13} \Leftrightarrow 0 \le x^2 - 2 \le 1 \Rightarrow 2 \le x^2 \le 3 \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} \le x \le -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \le x \le \sqrt{3} \end{cases}$

Questão – 12.36

Solução:

a) Vamos dividir em 2 casos:

• Caso 1: $a > 1$

$$\begin{cases} 3x-5>0 \\ 3x-5>1 \end{cases} \Rightarrow x > 2$$

• Caso 2: $0 < a < 1$

$$\begin{cases} 3x-5>0 \\ 3x-5<1 \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{3} < x < 2$$

b) • Caso 1: $a > 1$

$$\begin{cases} 3x-2>0 \\ 3-2x>0 \\ 3-2x \geq 3-2x \end{cases} \Rightarrow 1 \leq x < \frac{3}{2}$$

• Caso 2: $0 < a < 1$

$$\begin{cases} 3x-2>0 \\ 3-2x>0 \\ 3-2x \leq 3-2x \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{3} < x \leq 1$$

Questão – 12.37

Solução:

a) CORREÇÃO NO ENUNCIADO: $\frac{1}{5} \cdot \log_{\frac{1}{3}}^{x^2-4x+4} > \frac{2}{5}$

$$\left(\frac{1}{5}\right) \cdot \log_{\frac{1}{3}}^{x^2-4x+4} > \frac{2}{5} \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}^{x^2-4x+4} > 2 \Rightarrow x^2-4x+4 < \frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-4x+\frac{35}{9} < 0 \Rightarrow \frac{5}{3} < x < \frac{7}{3}$$

Note que $x^2-4x+4 > 0$ logo $x \neq 2$ e $\frac{5}{3} < x < \frac{7}{3}$

b) Vamos dividir em 2 casos
• Caso 1: $x > 1$

Neste caso temos que:

$$\begin{cases} x^{\log_{\frac{1}{10}}^{x-2}} > x^{-1} \Rightarrow \log_{\frac{1}{10}}^{x-2} > -1 \Rightarrow x-2 < 10 \Rightarrow x < 12 \Rightarrow 2 < x < 12 \\ x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \end{cases}$$

• Caso 2: $0 < x < 1$
Neste caso temos que:

$$\begin{cases} x^{\log_{\frac{1}{10}}^{x-2}} > x^{-1} \Rightarrow \log_{\frac{1}{10}}^{x-2} < -1 \Rightarrow x-2 > 10 \Rightarrow x > 12 \Rightarrow S = \varnothing \\ x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \end{cases}$$

Portanto a solução é o intervalo $2 < x < 12$

c) Vamos dividir em 2 casos
• Caso 1: $x > 1$
Neste caso temos que:

$$x^{\log_3^x} > x^2 \Rightarrow \log_3^x > 2 \Rightarrow x > 9$$

• Caso 2: $0 < x < 1$
Neste caso temos que:

$$x^{\log_3^x} > x^2 \Rightarrow \log_3^x < 2 \Rightarrow x < 9$$

Logo temos que a solução é $0 < x < 1$ ou $x > 9$

d) Faça $y = \log_3^x$, daí temos que:

$$x^{\log_3^x} \geq 27x^2 \Rightarrow 3^{y^2} \geq 3^{3+2y} \Rightarrow y^2 - 2y - 3 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} y \leq -1 \\ y \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{3} \\ x \geq 27 \end{cases}$$

Questão – 12.38

Solução:

Faça $\log_a^x = y$. Assim temos que $a^y = x$.
Daí temos que:

$a^{y^2} \leq a^1$

Agora temos 2 casos analisar

Caso 1: $a > 1$

$$a^{y^2} \leq a^1 \Rightarrow y^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{a} \leq x \leq a$$

Caso 2: $0 < a < 1$

$$a^{y^2} \leq a^1 \Rightarrow y^2 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ y \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x \leq a \\ x \geq \frac{1}{a} \end{cases}$$

Questão – 12.39

Solução:

a) crescente, pois $\pi > 1$

b) decrescente, pois $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

c) decrescente, pois $0 < (0,8)^2 < 1$

d) crescente, pois $e > 1$

Capítulo 13

Capítulo 13

EXERCICOS PROPOSTOS

Questão – 13.8

Solução:

a) $2^x > 0 \Rightarrow 2^x - 2 > -2$

b) $3^x > 0 \Rightarrow 3^x + \pi > \pi$

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^x > 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x - \sqrt{5} > -\sqrt{5}$

Capítulo 14

Capítulo 14

EXERCICOS PROPOSTOS

Questão – 14.4

Solução:

a) $\log_5^{x+2} = y \Rightarrow 5^y = x+2 \Rightarrow 5^y - 2 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = 5^x - 2$

b) $\log_5^x + 2 = y \Rightarrow 5^{y-2} = x \Rightarrow f^{-1}(x) = 5^{x-2}$

c) $3^{2x+3} = y \Rightarrow \log_3^{3^{2x+3}} = \log_3^y \Rightarrow 2x+3 = \log_3^y \Rightarrow x = \dfrac{\log_3^y - 3}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\cdot\log_3^y - \dfrac{3}{2}$

d) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x - 5 = y \Rightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = y+5 \Rightarrow x = \log_{\frac{1}{2}}^{y+5} \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}}^{x+5}$

Questão – 14.5

Solução:

a) $y = 3 - \log(x+1) \Rightarrow \log(x+1) = 3 - y \Rightarrow 10^{3-y} = x+1 \Rightarrow 10^{3-y} - 1 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = 10^{3-x} - 1$

b) $y = 2^{x-5} + 7 \Rightarrow y - 7 = 2^{x-5} \Rightarrow \log_2^{y-7} = x - 5 \Rightarrow \log_2^{y-7} + 5 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2^{x-7} + 5$

Questão – 14.6

Solução:

$y = \log_3^{2^x} \Rightarrow y = x\cdot\log_3^2 \Rightarrow \dfrac{y}{\log_3^2} = x \Rightarrow y\cdot\log_2^3 = x \Rightarrow \log_2^{3^y} = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2^{3^x}$

Questão – 14.7

Solução:

a) $5^x = \alpha \Rightarrow y = \alpha - \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \alpha^2 - y\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{y + \sqrt{y^2 - 8}}{2} > 0 \\ \alpha_2 = \frac{y - \sqrt{y^2 + 8}}{2} < 0 \end{cases} \Rightarrow 5^x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 8}}{2}$

$\Rightarrow x = \log_5 \frac{y+\sqrt{y^2+8}}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_5 \frac{x+\sqrt{x^2+8}}{2}$

b) $4^x = \alpha \Rightarrow y = \alpha - \frac{16}{\alpha} \Rightarrow \alpha^2 - y\alpha - 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{y + \sqrt{y^2 + 64}}{2} > 0 \\ \alpha_2 = \frac{y - \sqrt{y^2 + 64}}{2} < 0 \end{cases} \Rightarrow 4^x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 64}}{2}$

$\Rightarrow x = \log_4 \frac{y+\sqrt{y^2+64}}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_4 \frac{x+\sqrt{x^2+64}}{2}$

Questão – 14.8

Solução:

$2^x = \alpha \Rightarrow y = \frac{\alpha - \frac{1}{\alpha}}{2} \Rightarrow \alpha^2 - 2y\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{2y + \sqrt{4y^2 + 4}}{2} > 0 \\ \alpha_2 = \frac{2y - \sqrt{2y^2 + 4}}{2} < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x = \frac{2y + \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y + \sqrt{y^2 + 1} \Rightarrow x = \log_2^{y+\sqrt{y^2-1}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2^{x+\sqrt{x^2-1}}$

EXERCICIOS SUPLEMENTARES

Questão – IV.1

Solução:

$$x > y \Rightarrow -x < -y \Rightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \Rightarrow a^{-x} > a^{-y} \\ a > 1 \Rightarrow a^{-x} < a^{-y} \end{cases} \Rightarrow 0 < a < 1$$

Questão – IV.2

Solução:

Vamos dividir em 2 casos:
Caso 1: $0 < a < 1$

$$a^{x^3-1} \leq a^{x^2-1} \Rightarrow x^3 - 1 \geq x^2 - 1 \Rightarrow x^2 \cdot (x-1) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Caso 2: $a > 1$

$$a^{x^3-1} \leq a^{x^2-1} \Rightarrow x^3 - 1 \leq x^2 - 1 \Rightarrow x^2 \cdot (x-1) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow x \leq 1$$

Questão – IV.3

Solução:

Vamos dividir em 2 casos:
Caso 1: $e^x - 1 \geq 0$ e $1 - x^2 < 0$

$$\begin{cases} e^x - 1 \geq 0 \\ 1 - x^2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x \geq 1 \\ 1 < x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 1 < x \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x > 1$$

Caso 2: $e^x - 1 \leq 0$ e $1 - x^2 > 0$

$$\begin{cases} e^x - 1 \leq 0 \\ 1 - x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x \leq 1 \\ 1 > x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow -1 < x \leq 0$$

Questão – IV.4

Solução:

Vamos dividir em 2 casos:
• Caso 1: $0 < x < 1$

$x^{x^2-5x+6} > x^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 < 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 < 0 \Rightarrow 1 < x < 4$
Como $0 < x < 1$ não temos solução neste caso.

• Caso 2: $x > 1$

$$x^{x^2-5x+6} > x^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 > 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 4 \end{cases}$$

Como $x > 1$ temos solução neste caso $x > 4$

Questão – IV.5

Solução:

$x < y < 0 \Rightarrow |x| > |y| \Rightarrow \log|x| > \log|y|$
Portanto a função é decrescente

Questão – IV.6

Solução:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x - 243 \geq 0 \Rightarrow 3^{-x} \geq 3^5 \Rightarrow -x \geq 5 \Rightarrow x \leq -5$$

Questão – IV.7

Solução:

$$\frac{2^x - 1}{2 - x} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 2^x - 1 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \\ \text{ou} \\ 2^x - 1 < 0 \\ 2 - x < 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 2$$

Questão – IV.8

Solução:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 15 > 0 \\ x \neq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -3 \\ \text{ou} \\ x > 5 \\ x \neq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x > 5$$

Questão – IV.9

Solução:

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}^{\log_4^{x^2-5}} > 0 \\ \log_4^{x^2-5} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_4^{x^2-5} < 1 \Leftrightarrow x^2 - 5 < 4 \Leftrightarrow x^2 < 9 \Leftrightarrow -3 < x < 3 \\ x^2 - 5 > 1 \Leftrightarrow x^2 > 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{6} \\ x < -\sqrt{6} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 < x < -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} < x < 3 \end{cases}$$

Questão – IV.10

Solução:

$$\left|\log x^2 - 6x + 9\right| > \log x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow \log x^2 - 6x + 9 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 4 \text{ e } x \neq 3$$

Questão – IV.11

Solução:

$$\log_{|x|}^{\sqrt{5}} - \log_{|x|}^{5} > 0 \Leftrightarrow \log_{|x|}^{\sqrt{5}} > \log_{|x|}^{5} \Leftrightarrow 0 < |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \text{ e } x \neq 0$$

Questão – IV.12

Solução:

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}^{\log_{\frac{1}{4}}^{x}} > 0 \\ \log_{\frac{1}{4}}^{x} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}^{x} < 1 \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} < x < 1 \\ x < 1 \end{cases}$$

Questão – IV.13

Solução:

$$4x^2 - 16x + 15 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{16+4}{8} = \dfrac{5}{2} \\ x < \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{16-4}{8} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Questão – IV.14

Solução:

$x^2 - \log a = 0 \Rightarrow x^2 = \log a \Rightarrow \log a \geq 0 \Rightarrow a \geq 1$

Questão – IV.15

Solução:

$\Delta > 0 \Rightarrow 4 - 4\log a > 0 \Rightarrow 4 > 4\log a \Rightarrow 1 > \log a \Rightarrow 0 < a < 10$

Questão – IV.16

Solução:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 4 + 4\log_a^{m+1} > 0 \Rightarrow -4 > 4\log_a^{m+1} \Rightarrow -1 \geq \log_a^{m+1} \Rightarrow \begin{cases} a > 1 \Rightarrow m+1 > \dfrac{1}{a} \\ 0 < a < 1 \Rightarrow 0 < m+1 < \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

Questão – IV.17

Solução:

$a > 1 \Rightarrow \log_a^{\log_b^x} < 0 \Rightarrow \log_b^x < 1$

$0 < b < 1 \Rightarrow \log_b^x < 1 \Rightarrow x > b$

$0 < b < 1 \Rightarrow \log_b^{\log_a^x} > 0 \Rightarrow \log_a^x < 1$

$a > 1 \Rightarrow \log_a^x < 1 \Rightarrow x < a$

Portanto temos que: $b < x < a$ e $x \neq 1$

Questão – IV.20

Solução:

$$e^{2x} - 2e^x \cdot f(x) - 1 = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$$

$$e^x = \alpha \Rightarrow y = \frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha} \Rightarrow \alpha^2 - 2y\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \begin{cases} \dfrac{2y + 2\cdot\sqrt{y^2+1}}{2} \\ \dfrac{2y - 2\cdot\sqrt{y^2+1}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \begin{cases} y + \sqrt{y^2+1} > 0 \\ y - \sqrt{y^2+1} < 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = y + \sqrt{y^2+1}$$

$\alpha = y + \sqrt{y^2+1} \Rightarrow e^x = y + \sqrt{y^2+1}$

$e^y = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \ln e^y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \Rightarrow f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

Questão – IV.21

Solução:

$$e^x = \alpha \Rightarrow y = \frac{\alpha - \frac{1}{\alpha}}{\alpha + \frac{1}{\alpha}} \Rightarrow y = \frac{\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}}{\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}} \Rightarrow y = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1} \Rightarrow \alpha^2(y-1) + y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{1+y}{1-y} \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \Rightarrow e^x = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \Rightarrow \ln e^x = \ln\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \Rightarrow x = \ln\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$$

$$y = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Questão – IV.22

Solução:

$$\begin{cases} \log_1^{\log_3^{|x-3|}} > 0 \\ \log_3^{|x-3|} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3^{|x-3|} < 1 \\ |x-3| > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-3| < 3 \\ |x-3| > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 < x-3 < 3 \\ x-3 > 1 \\ x-3 < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 6 \\ x > 4 \\ x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ 4 < x < 6 \end{cases}$$

Questão – IV.23

Solução:

$$\log_3^{\log_{x^2}^{\log_{x^2}^{x^4}}} = \log_3^{\log_{x^2}^2}$$

$$\begin{cases} \log_{x^2}^2 > 0 \\ \log_3^{\log_{x^2}^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\log_{x^2}^2} = \log_2^{x^2} > 0 \\ \log_{x^2}^2 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\log_{x^2}^2} = \log_2^{x^2} > 0 \\ \frac{1}{\log_{x^2}^2} = \log_2^{x^2} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 > 1 \\ 2 > x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} < x < -1 \\ 1 < x < \sqrt{2} \end{cases}$$

Questão – IV.24

Solução:

Vamos dividir em 2 casos:

• Caso 1: $0 < x < 1$

$$x^{2-(\log_2^x)^2-\log_2^{x^2}} > \frac{1}{x} \Rightarrow x^{2-(\log_2^x)^2-\log_2^{x^2}} > x^{-1} \Rightarrow 2-(\log_2^x)^2-\log_2^{x^2} < -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_2^x)^2 + 2\log_2^x - 3 > 0 \Rightarrow \begin{cases} \log_2^x < -3 \\ \log_2^x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{8} \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{8}$$

• Caso 2: $x > 1$

$$x^{2-(\log_2^x)^2-\log_2^{x^2}} > \frac{1}{x} \Rightarrow x^{2-(\log_2^x)^2-\log_2^{x^2}} > x^{-1} \Rightarrow 2-(\log_2^x)^2-\log_2^{x^2} > -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_2^x)^2 + 2\log_2^x - 3 < 0 \Rightarrow -3 < \log_2^x < 1 \Rightarrow \frac{1}{8} < x < 2 \Rightarrow 1 < x < 2$$

Questão – IV.25

Solução:

$$\frac{1}{\log_a^x} > 1 \Rightarrow \frac{1-\log_a^x}{\log_a^x} > 0$$

Agora temos 2 casos a analisar:

• Caso 1: $\begin{cases} 1-\log_a^x > 0 \\ \log_a^x > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 1-\log_a^x > 0 \\ \log_a^x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 > \log_a^x \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > x \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < a$$

• Caso 2: $\begin{cases} 1-\log_a^x < 0 \\ \log_a^x < 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 1-\log_a^x < 0 \\ \log_a^x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < \log_a^x \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < x \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow a < x < 1$$

Absurdo, pois $a > 1$

Portanto a única solução é $1 < x < a$

Questão – IV.26

Solução:

$$\frac{1+(\log_a^x)^2}{1+\log_a^x} > 1 \Rightarrow \frac{1+(\log_a^x)^2}{1+\log_a^x} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{1+(\log_a^x)^2-(1+\log_a^x)}{1+\log_a^x} > 0 \Rightarrow \frac{(\log_a^x)^2-\log_a^x}{1+\log_a^x} > 0$$

Agora temos 2 casos a analisar:

• Caso 1: $\begin{cases}(\log_a^x)^2-\log_a^x > 0\\ 1+\log_a^x > 0\end{cases}$

$$\begin{cases}(\log_a^x)^2-\log_a^x > 0\\ 1+\log_a^x > 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\log_a^x > 1\\ \log_a^x < 0\\ \log_a^x > -1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x < a\\ x > 1\\ x < \frac{1}{a}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0 < x < a\\ 1 < x < \frac{1}{a}\end{cases}$$

• Caso 2: $\begin{cases}(\log_a^x)^2-\log_a^x < 0\\ 1+\log_a^x < 0\end{cases}$

$$\begin{cases}(\log_a^x)^2-\log_a^x < 0\\ 1+\log_a^x < 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0 < \log_a^x < 1\\ \log_a^x < -1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1 < x < a\\ x > \frac{1}{a}\end{cases}$$

Como $0 < a < 1$ e $1 < x < a$ temos que este caso não tem solução.

Portanto as únicas soluções são $0 < x < a$ ou $1 < x < \frac{1}{a}$

Questão – IV.27

Solução:

$$0 < k < 1 \Rightarrow \frac{1}{k} > 1$$

$$\log_x^{kx} = \alpha$$

$$\log_x^{kx} = \alpha \Rightarrow \log_{kx}^x = \frac{1}{\alpha}$$

$$\log_{kx}^x + \log_x^{kx^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} + \log_x^{kx} + \log_x^x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} + \alpha + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha} > 0 \Leftrightarrow \alpha > 0$$

Agora temos 2 casos a analisar:

• Caso 1: $x > 1$

$$\alpha > 0 \Rightarrow \log_x^{kx} > 0 \Rightarrow kx > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{k}$$

Como $x > 1$ e $\frac{1}{k} > 1$ temos que a solução é $x > \frac{1}{k}$

• Caso 2: $0 < x < 1$

$$\alpha > 0 \Rightarrow \log_x^{kx} > 0 \Rightarrow kx < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{k}$$

Como $0 < x < 1$ e $\frac{1}{k} > 1$ temos que a solução é $0 < x < 1$

Questão – IV.28

Solução:

$$\log_a^b = x$$

$$\log_a^b = x \Rightarrow \log_b^a = \frac{1}{\log_a^b} = \frac{1}{x}$$

$$\log_{ab}^b = \frac{1}{\log_b^{ab}} = \frac{1}{\log_b^a + \log_b^b} = \frac{1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{1}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x}{x+1}$$

$$y = (\log_b^a + \log_a^b + 2)\cdot(\log_a^b - \log_{ab}^b)\cdot(\log_b^a) - 1 = \left(\frac{1}{x} + x + 2\right)\cdot\left(x - \frac{x}{x+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right) - 1$$

$$= \left(\frac{1+x^2+2x}{x}\right)\cdot\left(\frac{x^2-x+x}{x+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = \left(\frac{(x+1).(x+1)}{x}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{x+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right) - 1 =$$

$$= (x+1) - 1 = x = \log_a^b$$

Bibliografia

[1] ANTAR, Aref; SAMPAIO, José Luis; LAPA, Nilton; CAVALCANTTE, Sidney, progressões e logaritmos: **Noções de Matemática**, São Paulo, Editora Moderna, 1979

[2] Miranda, Marcílio. **Problemas Selecionados de Matemática ITA-IME – Olimpíadas**, Volumes 1 , Fortaleza(CE), Editora Vestseller, 2010.

[3] IEZZI, Gelson, MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da Matemática Elementar: LOGARITMOS.** Atual Editora: São Paulo, 2005.

A Editora Vestseller tem a honra de apresentar: Solucionário - Noções de Matemática, que visa consolidar o máximo de aproveitamento da lendária obra de Aref Antar Neto, Nilton Lapa, José Luiz Pereira Sampaio e Sidney Luiz Cavallante, a Coleção Noções de Matemática, uma obra prima em 8 volumes, que trata de todo o conteúdo da Matemática do Ensino Médio de forma primorosa, com volumes que contem teoria completa e detalhada, incluindo demonstrações de propriedades e de teoremas.

Este solucionário é composto por questões resolvidas pelo professor Marcilio Miranda autor de Problemas Selecionados de Matemática volume 1,, que nos honrou em colaborar com suas horas de estudo e trabalho para garantir um livro de qualidade e indispensável para alunos e professores.

ISBN 8560653423

EDITORA VestSeller

www.vestseller.com.br